

Застосування методу кутових точок у аналізі напружень під плитним фундаментом: порівняння з числовим моделюванням (модель Кулона-Мора)

Вероніка ЖУК¹, Олександр ГАВРИЛЮК²

Київський національний університет будівництва і архітектури
31, просп. Повітряних Сил, Київ, Україна, 03037

¹zhuk.vv@knuba.edu.ua, <https://orcid.org/0000-0002-1114-3192>

²gavryliuk.ov@knuba.edu.ua, <https://orcid.org/0000-0001-7252-0679>

DOI: 10.32347/0475-1132.51.2025.50-58

Анотація. Останнім часом, в умовах розвитку будівництва, особливо в умовах стрімкої урбанізації та високої щільності забудови, проектування фундаментів стає дедалі складнішим завданням. Від інженерів та проєктувальників вимагається не лише висока точність у розрахунках, а й обґрунтованість технічних рішень та гарантія максимальної надійності конструкцій. Одним із найважливіших і найвідповідальніших етапів є детальне вивчення та аналіз напружено-деформованого стану ґрунтової основи, яка безпосередньо сприймає навантаження від споруди. Саме точність оцінки напружено-деформованого стану в подальшому визначає стійкість, довговічність і безпеку всієї будівлі.

Визначення напружень під подошвою фундаменту може здійснюватися з різним ступенем деталізації — від використання спрощених аналітичних підходів до складного тривимірного моделювання, яке враховує нелінійну реакцію ґрунту на дію навантаження. Вибір конкретного підходу визначається складністю об'єкта, інженерно-геологічними умовами ділянки, категорією відповідальності споруди та необхідною точністю розрахунків.

Врахування нелінійної поведінки ґрунтової основи є важливим, оскільки реальний ґрунт не демонструє лінійну залежність між напруженнями та деформаціями. На відміну від пружної моделі, нелінійне моделювання дозволяє точніше оцінити осідання, розподіл напружень та реальні межі міцності ґрунту. Це підвищує достовірність розрахунків, зменшує ризики недооцінки деформацій і сприяє оптимізації конструктивних рішень.

У роботі здійснено порівняння між аналітичним методом кутових точок та числовим



Вероніка ЖУК
доцент кафедри
геотехніки
к.т.н., доц.



Олександр ГАВРИЛЮК
асистент кафедри
геотехніки

моделюванням при визначенні напружень у ґрунтовій основі під фундаментом. Основна увага приділена оцінці точності, обґрунтованості та можливості практичного застосування аналітичного методу в умовах реального ґрунтового середовища. Дослідження виконано на прикладі плитного фундаменту на піщаній ґрунтовій основі. Для числового моделювання було застосовано програмний комплекс «Midas GTS NX». При цьому для ґрунтового масиву було використано об'ємні скінченні елементи та модель Кулона-Мора, що описує закономірність поведінки ґрунту під навантаженням. Зафіксовано значне зниження значень контактних напружень для кутової та периферійної зони плити та суттєве завищення для центральної. З віддаленням від подошви фундаменту різниця поступово зменшується. Виведено коефіцієнт розбіжності.

Ключові слова. Плитний фундамент, ґрунтова основа, напруження, метод кутових точок, числове моделювання, MIDAS GTS NX, модель Кулона-Мора.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Існує кілька підходів до визначення напружень у ґрунтовій основі: від простих аналітичних розрахунків (Rojas, 2020; Fadum, 1948; Terzaghi, 1955) до більш детальних і складних числових (Носенко, 2020; Keskin, 2008). Аналітичні методи, як правило, мають певні спрощення та припущення, а тому використовуються тільки для попередньої оцінки. Числове моделювання дає можливість врахувати вплив більш широкого кола чинників на формування напружень в ґрунтовій основі під фундаментом.

При проектуванні фундаментів врахування нелінійної поведінки ґрунтової основи є важливим, оскільки ґрунт не реагує на навантаження лінійно: його жорсткість змінюється залежно від напружень, ущільнення та тривалості дії навантаження. Пружна модель часто спрощує ситуацію і не враховує реальні межі міцності. Нелінійний підхід дозволяє точніше оцінити осідання, розподіл напружень і забезпечити надійність та ефективність фундаментів у складних інженерно-геологічних умовах.

МЕТА РОБОТИ

Мета роботи полягає у порівняльному аналізі ефективності використання методу кутових точок для розрахунку напружень у довільній точці ґрунтової основи під фундаментом, зіставленому з результатами числового моделювання. Дослідження спрямоване на перевірку точності, обґрунтованості та практичної цінності аналітичного підходу в умовах складного напруженого стану, характерного для реальних ґрунтових умов.

ОСНОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ

1. Методи оцінки напружень в ґрунтовій основі фундаменту.

Рівень точності оцінки напружень у ґрунті під плитним фундаментом варіюється від застосування спрощених аналітичних методів до комплексного тривимірного числового моделювання (табл. 1). Вибір підходу визначається характером інженерного завдання, складністю ґрунтових умов і класом відповідальності споруди.

Табл. 1. Способи оцінки напружень у ґрунтовій основі під фундаментом
Table 1. Methods for estimating stresses in the soil base under the foundation

<i>методи</i>	<i>переваги</i>	<i>недоліки</i>
аналітичні	– відносна простота; – придатність для ручних розрахунків	– спрощене уявлення про властивості ґрунту (однорідність, ізотропність); – не враховують складну геометрію навантаження або багатошарову будову ґрунту
напів-аналітичні	– врахування гнучкості плити; – врахування нерівномірності навантаження	– спрощене уявлення про поведінку ґрунту; – параметр жорсткості основи потребує надійного визначення
числові	– врахування реальних ґрунтових шарів, їх нелінійної поведінки; – детальний розподіл напружень і переміщень; – врахування взаємодії з сусідніми фундаментами, підземними спорудами	– потреба у високоякісних геологічних даних; – потреба ідентифікації параметрів ґрунтового середовища; – складність моделювання; – залежність результатів від коректності введених даних
експериментальні	– висока достовірність результатів; – можливість врахування усіх впливів	– висока вартість; – тривалість виконання – потрібна кваліфікована інтерпретація результатів

2. Оцінка напружень під підшвою фундаменту методом кутових точок.

Метод кутових точок [Fadum, 1948] - це аналітичний підхід, який базується на рішеннях Буссінеска та дозволяє розрахувати вертикальне напруження (1) у довільній точці, розташованій на глибині z , під навантаженням, прикладеним до прямокутної площі з рівномірним тиском q . При цьому тиск визначається з використанням впливових коефіцієнтів для кожної з чотирьох кутових точок прямокутника.

$$\sigma_z = \frac{q}{4\pi} [\phi_{(x_1, y_1)} + \phi_{(x_2, y_2)} - \phi_{(x_1, y_2)} - \phi_{(x_2, y_1)}] \quad (1)$$

де σ_z - вертикальне напруження в точці на глибині z ; q - інтенсивність навантаження; ϕ - кут навантаженої площі (2); x_1, x_2, y_1, y_2 - координати кутів навантаженої площі; R - відстань до тоочки (3).

$$\phi_{(x, y)} = \arctan\left(\frac{xy}{zR}\right) + \frac{xyz}{R(z^2 + x^2 + y^2)} \quad (2)$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3)$$

Дослідження було реалізовано на прикладі фундаменту, який являє собою монолітну залізобетонну плиту габаритами 1,8 м на 2,6 м, висотою 0,3 м (рис. 1).

Фундамент навантажено рівномірно-розподіленим тиском $q = 200$ кПа. У якості основи прийнято пісок середньої крупності із модулем пружності $E = 30$ МПа та питомою вагою $\gamma = 17$ кН/м³.

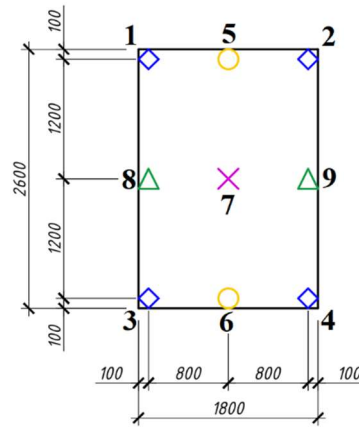


Рис.1. Схема фундаменту із дослідними точками.
Fig.1. Foundation plan with test points.

Напруження визначалися починаючи із глибини 0,1 м, із кроком 0,2 м. Такий підхід пов'язаний із тим, що необхідно порівняти результати аналітичного розрахунку із даними числового моделювання у програмному комплексі Midas GTS NX. Крок триангуляції сітки становить 0,2 м, а як відомо напруження визначаються у центрі скінченного елемента, тому напруження було визначено починаючи із глибини 0,1 м і до 9,9 м, з кроком 0,2 м.

Для аналізу результатів дослідження було обрано характерні точні в плані (рис. 1). За даними аналітичного розрахунку було побудовано епюри додаткового тиску σ_{zp} (рис. 2) на глибину 9,9 м, що становить 5,5b.

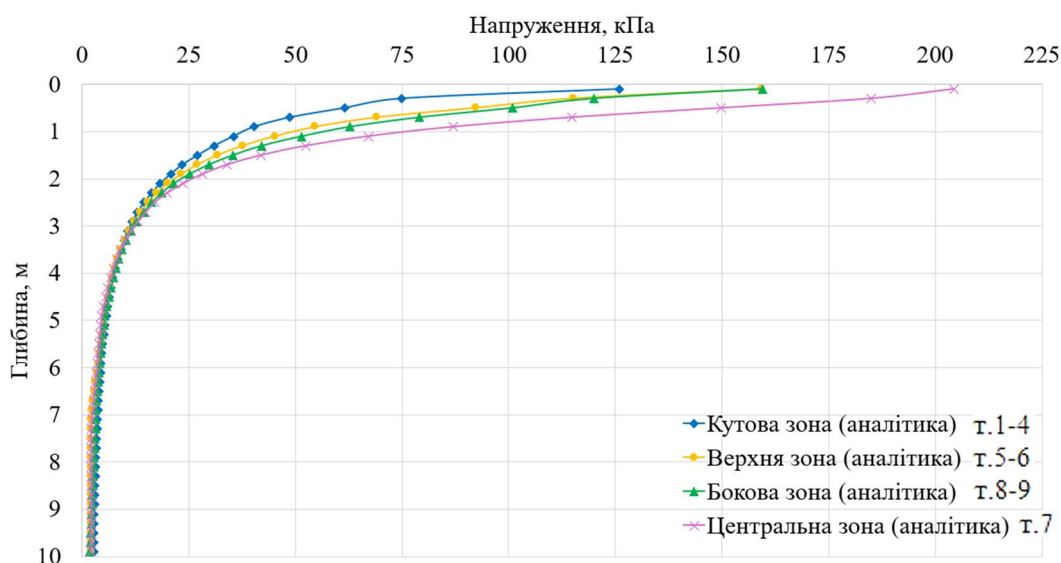


Рис.2. Графік залежності від глибини напружень під підшвою фундаменту у характерних точках.
Fig.2. Graph of stress distribution versus depth below the foundation base at characteristic points.

На рівні підшви фундаменту максимальні значення напружень виникають під плитою фундаменту у центральній зоні, 204 кПа, а мінімальні – в кутовій зоні, 126 кПа. Починаючи із глибини 3 м ця різниця практично зникає, напруження стають однаковими за величиною в кутовій і центральній зонах (рис. 2).

3. Напруження у ґрунтовій основі плитного фундаменту за даними числового моделювання

У процесі проектування фундаментів особливе значення має правильна оцінка поведінки ґрунтової основи під навантаженням. Традиційні підходи, які базуються на пружній моделі ґрунту, часто передбачають лінійну залежність між напруженнями та деформаціями. Такий підхід є спрощеним і не відображає реальної поведінки ґрунтів, особливо за умов високих навантажень або складної геотехнічної ситуації.

Насправді ж ґрунт є нелінійно-деформованим середовищем, де параметри жорсткості змінюються залежно від рівня напружень, виду та тривалості навантаження, історії навантаження, а також багатьох інших факторів. Ігнорування цих особливостей може призвести до заниження або завищення осідань, помилкової оцінки несучої здатності основи та, як наслідок, — до недостатньої надійності конструкції або надмірних витрат на її підсилення.

Урахування нелінійної поведінки ґрунтів дає змогу:

- точніше моделювати розподіл напружень і деформацій в основі;
- краще передбачати осідання та їх нерівномірність, що критично для високочутливих споруд;
- враховувати реальні межі міцності та ущільнення ґрунтів;
- оптимізувати розміри фундаментів та підвищити ефективність конструктивних рішень.

Отже, застосування нелінійних моделей ґрунтової основи є важливою умовою для забезпечення точності розрахунків, економічної ефективності проекту та загальної надійності будівельної конструкції.

Для числового моделювання було

розроблено скінчено-елементну модель (рис. 3), яка включає:

- ґрунтовий масив (моделюється об'ємними скінченими елементами з пружно-пластичним законом деформування Кулона-Мора);
- фундаментну плиту (моделюється елементами оболонки);
- інтерфейсні елементи на межі контакту оболонки фундаменту та об'ємних скінчених елементів ґрунту.

Скінчені елементи ґрунтового середовища мають наступні характеристики: модуль деформації $E = 30$ МПа; питома вага $\gamma = 18$ кН/м³; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$; питоме зчеплення $c = 1$ кПа; кут внутрішнього тертя $\varphi = 35^\circ$; кут дилатансії $\psi = 10^\circ$. Скінченим елементам фундаментної плити присвоєно модуль пружності $E = 30$ ГПа; питома вага $\gamma = 25$ кН/м³; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.2$. Параметри інтерфейсів: модуль пружності при нормальному (вертикальному) навантаженні $K_n = 6,35 \cdot 10^5$ кН/м³; модуль жорсткості при зсуві $K_t = 57,7 \cdot 10^3$ кН/м³; питоме зчеплення $c = 0,5$ кПа; кут внутрішнього тертя $\varphi = 19,3^\circ$.

Розроблена розрахункова модель (рис. 3) має змінну триангуляцію від 0,2 м до 2,8 м.

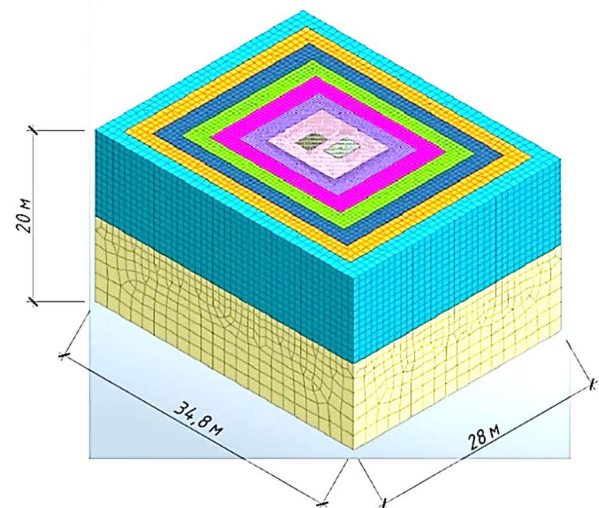


Рис.3. Скінчено-елементна модель.
Fig.3. Finite element model.

Плита завантажена рівномірно-розподіленим тиском $q = 200$ кПа. За результатами числового моделювання було проаналізовано напружено-деформований стан ґрунтового

середовища, а саме напружень в ґрунті на різній глибині у обраних для дослідження точках в межах контуру плити (рис. 1).

Оскільки розрахунок нелінійний, то було застосовано «монтаж», що враховує поетапне влаштування елементів моделі та прикладання навантаження. Було використано наступну схему «монтажу»:

- 1) ґрунтовий масив із власною вагою;
- 2) занулення переміщень від власної ваги;
- 3) влаштування плити фундаменту із прикладанням 50% навантаження та інтерфейсів на межі контакту бетону із ґрунтом;
- 4) прикладання решти 50% навантаження.

Кожна стадія була розбита на декілька десятків ітерацій, щоб досягти потрібної точності розрахунку. Також було враховано критерії збіжності результатів по переміщенням (0,1%) та по навантаженню (0,1%).

За результатами числового моделювання взаємодії фундаментної плити з ґрунтом було отримано напружено-деформований стан елементів розрахункової моделі.

Слід відмітити зручну можливість програмного комплексу «Midas GTS NX», яка полягає в тому, що програмний комплекс дозволяє створювати різноманітні комбінації напружено-деформованого стану із врахуванням різних стадій монтажу. За рахунок цієї можливості було проаналізовано величини саме додаткових напружень σ_{zp} (рис. 4), тобто без врахування природних напружень σ_{zg} від власної ваги ґрунту, які є складовими сумарних напружень в ґрунтовому масиві, що виникають при взаємодії конструкції з основою.

На рис. 4 приведено фрагмент скінчено-елементної моделі (ізополя показують напруження від зовнішніх впливів σ_{zp} в межах габариту фундаменту на глибину 10 м). За цими даними було побудовано епюри додаткового тиску (рис. 5) для проекцій точок 1...9, які було обрано для реалізації дослідження (рис. 1).

Напруження у кутових зонах плити змінювались в діапазоні від 270,3 кПа на глибині 0,1 м до 4,49 кПа на глибині 9,9 м. Порівняння напружень за числовим моделюванням та аналітичним розрахунком наведені на рис. 5-а та в середньому відрізняються у 2,23 рази. Слід відмітити, що за числовим

моделюванням напруження під підшовною фундаментом в кутовій зоні більші в 2,15 рази.

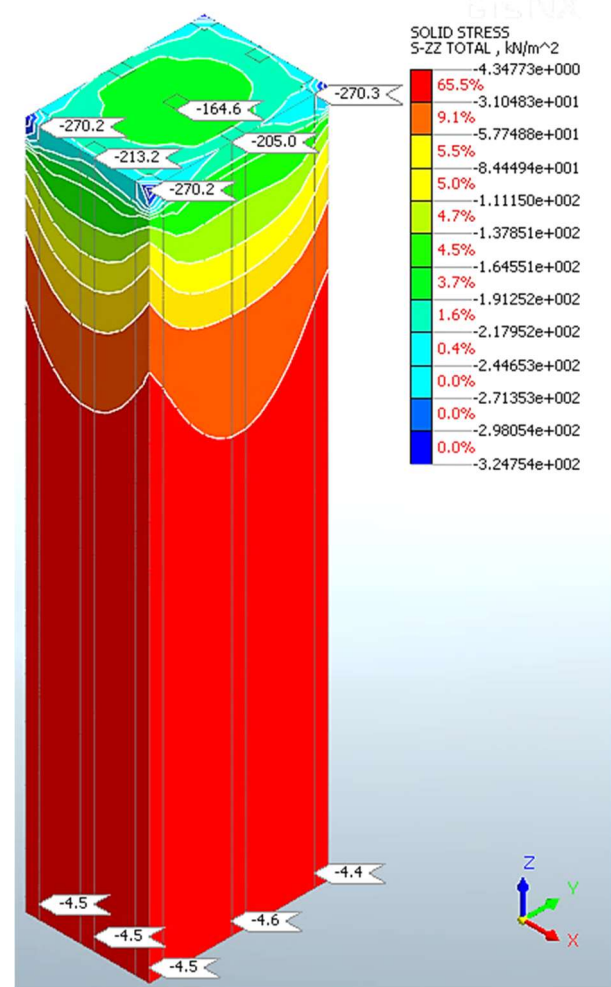


Рис.4. Напруження в ґрунтовому масиві від фундаментної плити, завантаженої рівномірно-розподіленим навантаженням 200 кН/м².

Fig.4. Stress distribution in the soil mass caused by the foundation and an applied load of 200 kPa

Напруження у верхній та/або нижній зоні плити змінювались в діапазоні від 213,21 кПа на глибині 0,1 м до 4,54 кПа на глибині 9,9 м. Порівняння напружень за даними числового моделювання та аналітичним розрахунком наведені на рис. 5-б та в середньому відрізняються у 2,78 рази.

Напруження у центральній зоні плити змінювались в діапазоні від 164,61 кПа на глибині 0,1 м до 4,69 кПа на глибині 9,9 м. Порівняння напружень за числовим моделюванням та аналітичним розрахунком наведені на рис. 5-с та в середньому відрізняються у 3,13 рази. Слід відмітити, що за числовим

моделюванням напруження у центральній зоні майже не змінюються до глибини 0,9 м та мають «перелом» графіку (різке зменшення напружень) на глибині від 4 м і нижче.

Напруження у лівій та/або правій зоні плити змінювались в діапазоні від 205,07 кПа на глибині 0,1 м до 4,62 кПа на глибині 9,9 м. Порівняння напружень за числовим моделюванням та аналітичним розрахунком наведені на рис. 5-*d* та в середньому відрізняються у 2,74 рази.

Зафіксовано значне заниження значень контактних напружень для кутової та периферійної зони плити та суттєве завищення для центральної. З віддаленням від підшови фундаменту різниця поступово зменшується.

Для зручності співставлення результатів аналітичної методики розрахунку (метод кутових точок) з даними числового моделювання, для більшої наочності відмінності напружень під фундаментом, в залежності від методу розрахунку, було побудовано поверхні для додаткових напружень на різних глибинах від плити (рис. 6).

В результаті порівняння напружень, що виникають в ґрунтовому масиві (рис. 6) було виявлено, що характер формування зони додаткових напружень відрізняється як кількісно так і якісно (форма поверхонь для додаткових напружень). На основі цього було визначено коефіцієнт розбіжності напружень для точок, які було обрано для дослідження (рис. 1) на різній глибині та побудовано графік (рис. 7). Аналізуючи графіки, можемо бачити, що напруження, отримані за допомогою аналітичних підходів (методу кутових точок) є заниженими. Лише в центральній зоні напруження за аналітичним розрахунком навпаки завищені, але ця тенденція зберігається тільки до глибини умовних 0,5 м.

Недооцінка напружень у зоні підшови фундаменту може спричинити помилкову оцінку осідань, що, у свою чергу, впливає на точність прогнозу напружено-деформованого стану та загальну надійність споруди. З огляду на це, доцільним є подальше проведення досліджень із урахуванням ширшого спектра факторів впливу, зокрема різних інженерно-геологічних умов, типів фундаментів, варіантів навантаження та моделей

ґрунтової поведінки.

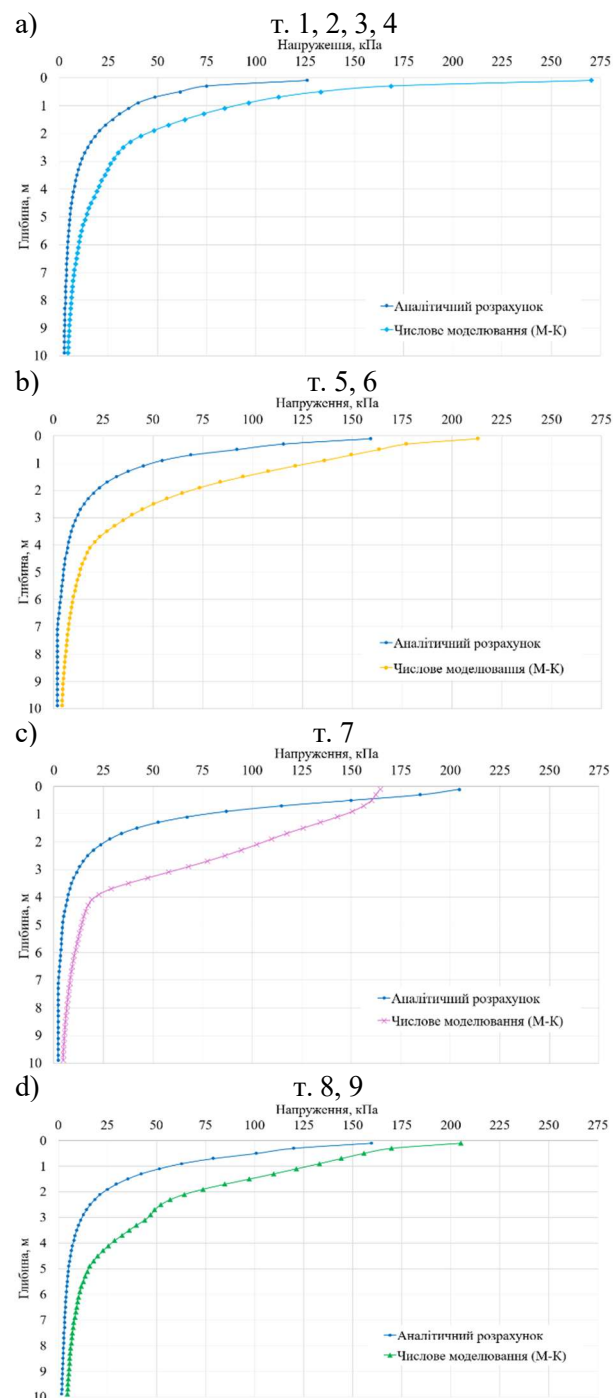


Рис.5. Напруження в основі (кПа) за даними методу кутових точок і числового моделювання: *a* – кутова зона плити (т. 1-4); *b* – верх та низ плити (т. 5-6); *c* – центр плити (т. 7); *d* – ліва та права зони плити (т. 8-9).

Fig.5. Stresses in the soil base (kPa) by corner method calculation and numerical simulation: *a* – slab corners (p. 1-4); *b* – top and bottom of the slab (p. 5-6); *c* – central zone of the slab (p. 7); *d* – left and right zone of the slab (p. 8-9).

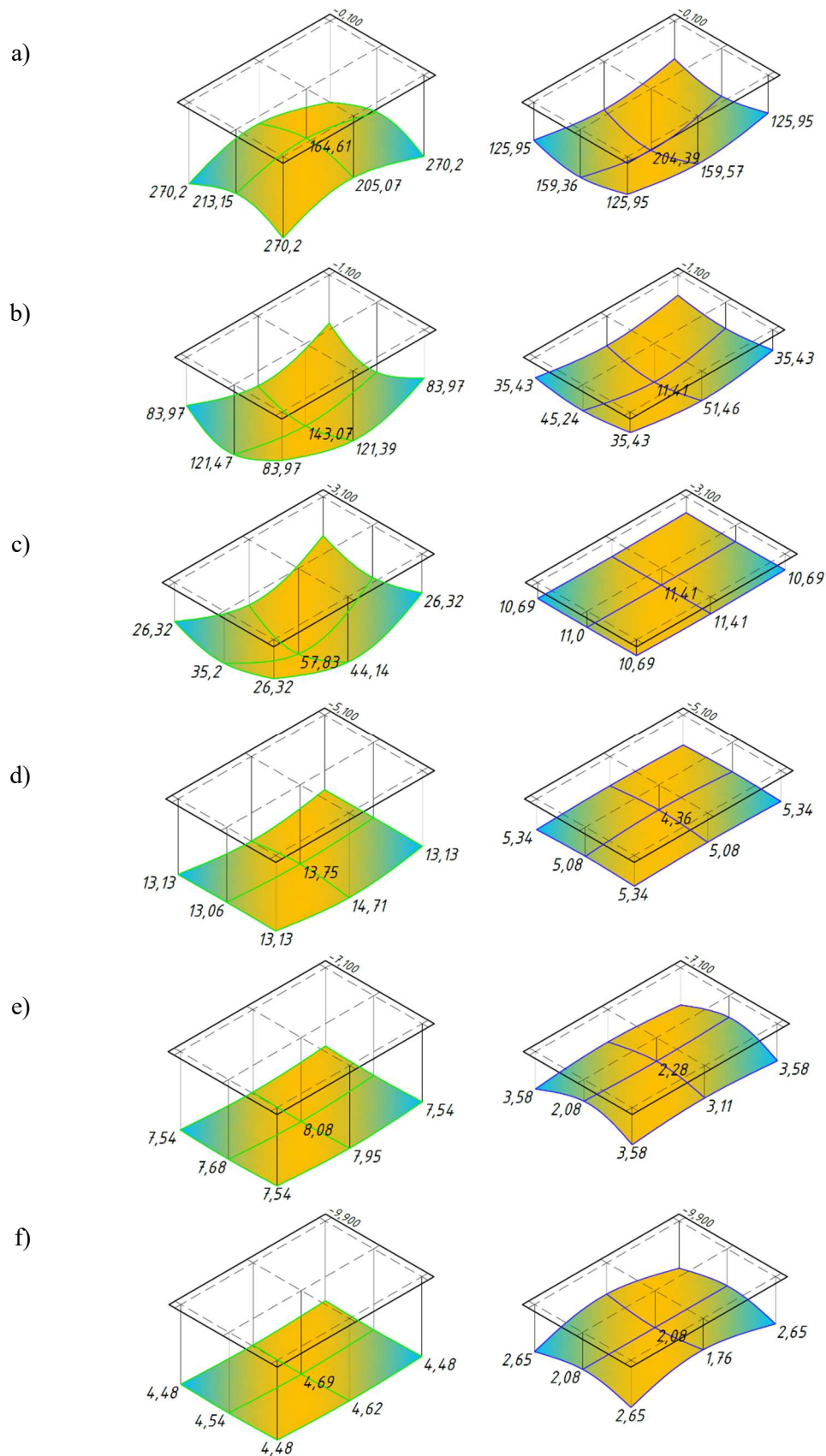


Рис.6. Напруження в ґрунтовому масиві (зліва – числове моделювання, справа – аналітичний розрахунок) на глибині: *a* - 0,1 м; *b* - 1,1 м; *c* - 3,1 м; *d* - 5,1 м; *e* - 7,1 м; *f* - 9,9 м.

Fig.6. Stress in the soil mass (left – numerical simulation, right – analytical calculation) at a depth of: *a* - 0.1 m; *b* - 1.1 m; *c* - 3.1 m; *d* - 5.1 m; *e* - 7.1 m; *f* - 9.9 m.

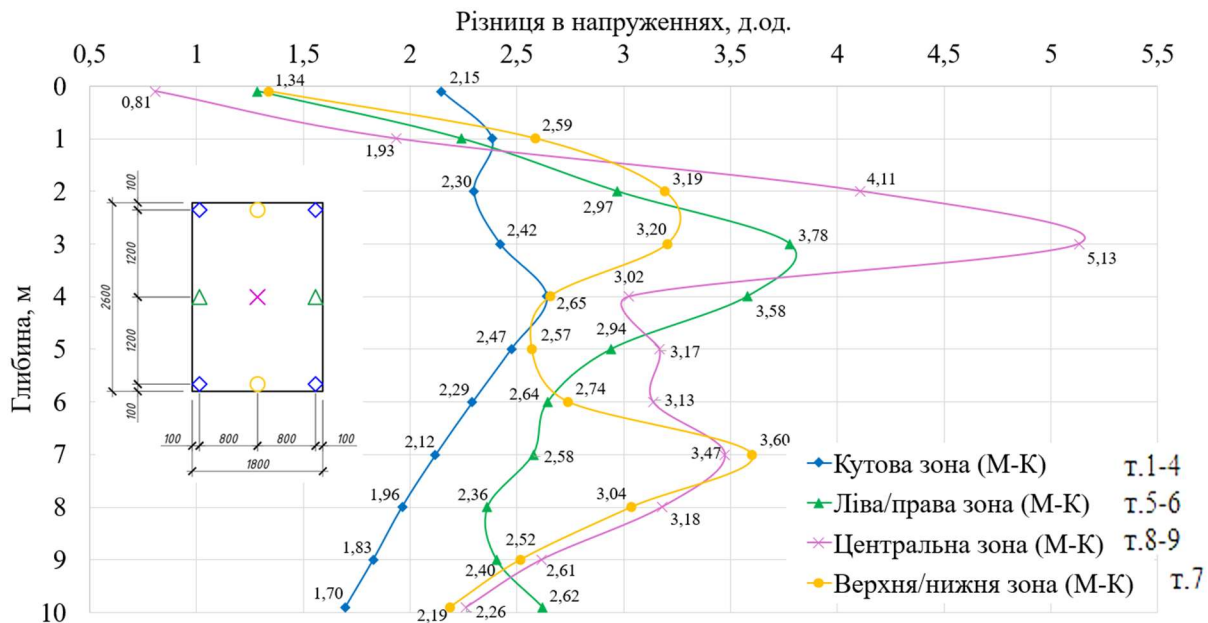


Рис.7. Кількісне порівняння напружень в ґрунтовому масиві в залежності від методу розрахунку.
Fig.7. A quantitative comparison of stresses in a soil mass based on different calculation methods.

ВИСНОВКИ ТА РЕКОМЕНДАЦІЇ

Показано, що метод визначення напружень в ґрунтовому масиві впливає на отримані результати. Використання методу кутових точок призводить до занижених результатів в порівнянні із числовим моделюванням (пружно-пластичний ґрунтовий масив із критерієм міцності Мора-Кулона):

- напруження в кутовій зоні фундаменту які визначені за аналітичним підходом в середньому будуть меншими в 2,2 рази;
- напруження у бокових зонах (верх та низ плити, лівий та правий бік фундаменту) які визначені за аналітичним підходом в середньому будуть меншими в 2,7 рази;
- напруження в центральній зоні фундаменту які визначені за аналітичним підходом в середньому будуть меншими в 3 рази.

Було виведено коефіцієнт розбіжності для обраних для дослідження точок і побудовано графіки, які показують в скільки разів напруження за аналітичним розрахунком є меншими ніж за числовим моделюванням.

Недооцінка напружень під подошвою фундаменту призводить до некоректного розрахунку осідання. Тому дане дослідження потребує продовження із застосуванням інших параметрів впливу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Luévanos Rojas, A., López Chavarria, S., Medina Elizondo, M., Sandoval Rivas, R., & Farías Montemayor, O. M. (2020). An analytical model for the design of corner combined footings. *Revista ALCONPAT*, 10 (3), 317-335. DOI: 10.21041/ra.v10i3.432
2. Fadum, E. Ralph. (1948). Influence Values For Estimating Stresses in Elastic Foundation. *Papers of 2nd International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering* (Rotterdam). 77-84. https://www.issmge.org/uploads/publications/1/43/1948_03_0020.pdf
3. Terzaghi, K.V. (1955). Evaluation of coefficient of subgrade reaction. *Geotechnique*. Londres, Vol. 5, No. 4, p. 297-326.
4. Носенко В., & Кашоїда О. (2020). Вплив вибору моделі основи на напружено-деформований стан вертикальних несучих елементів монолітно-каркасного будинку. *Основи та фундаменти*, 41, 45-54. DOI: 10.32347/0475-1132.41.2020.45-54
5. Keskin, M. & Laman, Mustafa & Baran, Tarik. (2008). Experimental Determination and Numerical Analysis of Vertical Stresses Under Square Footings Resting on Sand. *Teknik Dergi. Technical Journal of Turkish Chamber of Civil Engineers*. 19(4), 1263-1279. <https://www.researchgate.net/publication/265077913>

REFERENCES

1. Luévano Rojas, A., López Chavarría, S., Medina Elizondo, M., Sandoval Rivas, R., & Farías Montemayor, O. M. (2020). An analytical model for the design of corner combined footings. *Revista ALCONPAT*, 10 (3), 317-335. DOI:10.21041/ra.v10i3.432
2. Fadum, E. Ralph. (1948). Influence Values For Estimating Stresses in Elastic Foundation. *Papers of 2nd International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering* (Rotterdam). 77-84.
https://www.issmge.org/uploads/publications/1/43/1948_03_0020.pdf
3. Terzaghi, K.V. (1955). Evaluation of coefficient of subgrade reaction. *Geotechnique*. Londres, Vol. 5, No. 4, p. 297-326.
4. Nosenko V., & Kashoida O. (2020). Vplyv vyboru modeli osnovy na napruzhenno-deformovanyi stan vertykalnykh nesuchykh elementiv monolitno-karkasnoho budynku [Influence of the choice of the base model on the stress-strain state of the vertical load-bearing elements of a monolithic-frame house]. *Osnovy ta fundamenti*, 41, 45-54. (in Ukrainian)
DOI:10.32347/0475-1132.41.2020.45-54
5. Keskin, M. & Laman, Mustafa & Baran, Tarik. (2008). Experimental Determination and Numerical Analysis of Vertical Stresses Under Square Footings Resting on Sand. *Teknik Dergi. Technical Journal of Turkish Chamber of Civil Engineers*. 19(4), 1263-1279.
<https://www.researchgate.net/publication/265077913>

Corner point method for stress analysis beneath a slab foundation: comparison with Mohr–Coulomb numerical simulation

Veronika ZHUK
Oleksandr HAVRYLIUK

Summary. In recent years, with the rapid development of construction, particularly under conditions of accelerated urbanization and high building density, foundation design has become an increasingly complex engineering task. Engineers and designers are required not only to ensure high accuracy in calculations, but also to provide well-founded technical solutions and guarantee the maximum reliability of structures. One of the most

critical and responsible stages is the detailed investigation and analysis of the stress–strain state of the soil foundation, which directly carries the loads from the structure. The accuracy in assessing the stress–strain state ultimately determines the stability, durability, and safety of the entire building.

The determination of stresses beneath the foundation base can be performed with varying degrees of detail - ranging from simplified analytical approaches to complex **three-dimensional** modeling that accounts for the nonlinear response of soil to applied loads. The choice of a specific approach is determined by the complexity of the structure, the engineering–geological conditions of the site, the category of structural responsibility, and the required accuracy of the calculations.

Accounting for the nonlinear behavior of the soil foundation is essential, as real soil does not exhibit a linear relationship between stresses and strains. Unlike the elastic model, nonlinear modeling enables a more accurate assessment of settlements, stress distribution, and the actual strength limits of the soil. This enhances the reliability of calculations, reduces the risk of underestimating deformations, and contributes to the optimization of structural design solutions.

This study presents a comparison between the analytical corner point method and numerical modeling for determining stresses in the soil foundation beneath a foundation structure. The main focus is on evaluating the accuracy, validity, and practical applicability of the analytical method under real soil conditions. The investigation is conducted using the example of a slab foundation on a sandy soil base. Numerical modeling was carried out using the “Midas GTS NX” software package. The soil mass was modeled with three-dimensional finite elements, employing the Mohr–Coulomb model to describe the soil’s behavior under loading. The results revealed a significant underestimation of contact stress values in the corner and peripheral zones of the slab and a substantial overestimation in the central zone. With increasing depth below the foundation base, this discrepancy gradually decreases. A discrepancy coefficient was derived.

Key words. Slab foundation, soil base, stress, Fadum (Corner) method, numerical simulation, MIDAS GTS NX, Mohr–Coulomb model.