

Визначення напружень у ґрунтовій основі під плитним фундаментом: метод кутових точок і лінійно-пружне моделювання

Остан КАШОЇДА¹, Олександр ГАВРИЛЮК²

Київський національний університет будівництва і архітектури
31, просп. Повітряних Сил, Київ, Україна, 03037

¹kashoida_oo@knuba.edu.ua, <https://orcid.org/0000-0002-9234-4489>

²gavryliuk.ov@knuba.edu.ua, <https://orcid.org/0000-0001-7252-0679>

DOI: 10.32347/0475-1132.51.2025.59-66

Анотація. У сучасних умовах розвитку будівельної галузі, зокрема в контексті інтенсивної урбанізації та високої щільності міської забудови, процес проектування фундаментів набуває особливої складності. Від інженерів та проєктувальників вимагається високий рівень точності, обґрунтованості розрахунків та забезпечення максимальної надійності конструкцій. Одним із ключових і найвідповідальніших етапів цього процесу є ретельне дослідження та аналіз напружено-деформованого стану ґрунтової основи, яка безпосередньо сприймає навантаження від споруди. Від правильності оцінки цього стану значною мірою залежить стабільність, довговічність і безпечність усієї споруди.

Оцінка напружень під підшвою фундаментів може виконуватися з різним рівнем точності - від простих аналітичних формул до повноцінного 3D-моделювання з врахуванням нелінійної закономірності поведінки ґрунту під навантаженням. Вибір методу залежить від складності об'єкта, інженерно-геологічних умов, рівня відповідальності споруди та вимог до точності розрахунку.

Представлене дослідження впливу методу розрахунку напружень під підшвою фундаменту виконано на прикладі плитного фундаменту прямокутної форми на одношаровій ґрунтовій основі, що складена піском середньої крупності. Напруження було визначено аналітичним способом, а саме, методом кутових точок, та порівняно з результатами числового моделювання взаємодії фундаменту з ґрунтом.

Для числового моделювання було застосовано програмний комплекс «Midas GTS NX». При цьому для ґрунтового масиву було використано об'ємні скінчені елементи та лінійно-

пружна модель, що описує закономірність пове-



Остан КАШОЇДА
доцент кафедри
геотехніки
PhD



Олександр ГАВРИЛЮК
асистент кафедри
геотехніки

дінки ґрунту під навантаженням.

Зафіксовано невідповідність напружень, визначених аналітичним шляхом, реальному характеру розподілу напружень під фундаментом. Виявлено похибку аналітичної методики оцінки напружень методом кутових точок, особливо для контактних напружень на рівні підшви фундаменту. Запропоновано кореляційні коефіцієнти для центральної та периферійних зон плитного фундаменту для підвищення надійності результатів аналітичного розрахунку напружень під фундаментом. Заплановано продовження досліджень, направлених на аналіз впливу моделі ґрунтового середовища, показників ґрунтової основи та величини тиску на ґрунт основи.

Ключові слова. Плитний фундамент, ґрунтова основа, напруження, метод кутових точок, числове моделювання, MIDAS GTS NX, лінійно-пружна модель.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

У сучасному будівництві, особливо в умовах щільної забудови, проектування фундаментів вимагає підвищеної точності та надійності. Одним із найважливіших аспектів є визначення напружено-деформованого стану ґрунтової основи під фундаментами. Взаємодія плити з ґрунтом має нелінійний характер, тому просте припущення рівномірного навантаження часто не відповідає реальній картині. Це вимагає застосування достовірних методів розрахунку напружень – як аналітичних, так і числових. Також, в умовах щільної забудови критично важливо оцінити передачу напружень на сусідні споруди, фундамент яких може потрапити в зону впливу від новобудови. Недостатня точність оцінки напружень може призвести до конструктивних і економічних втрат.

МЕТА РОБОТИ

Метою роботи є порівняльний аналіз ефективності застосування методу кутових точок для визначення напружень у довільній точці ґрунтової основи під фундаментом із результатами числового моделювання. Дослідження спрямоване на оцінку точності, доцільності та практичного застосування аналітичного підходу у контексті складних напружених станів, що виникають під фундаментними конструкціями в умовах реального ґрунтового середовища.

ОСНОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ

1. Способи оцінки напружень у ґрунтовій основі під плитним фундаментом.

Існує кілька підходів до визначення напружень у ґрунтовій основі:

1) *аналітичні методи* (Rojas, 2020; Fadum, 1948; Terzaghi, 1955) базуються на класичних рішеннях теорії пружності та використовуються для попередніх інженерних оцінок:

- метод Буссінеска – розрахунок вертикального тиску від різних типів навантаження;
- метод кутових точок – визначення напружень під прямокутною областю

навантаження;

- метод Весика – оцінка осідань та тисків під жорсткою плитою;
- рішення Федорова–Садовського, Новачевського – для плит на пружній основі.

2) *напіваналітичні методи*. моделюють ґрунт як пружну основу, що чинить реактивний опір:

- модель Вінклера – ґрунт як система незалежних пружин;
- модель Пастернака – врахування зсувної жорсткості;
- метод Кисельова-Алексєєва – взаємодія плити з основою.

3) *числові методи*, зокрема метод скінчених елементів (Жук, 2022; Keskin, 2008), дозволяють моделювати складну геометрію, багатошарові основи та нелінійні властивості ґрунту. Реалізуються у програмах: PLAXIS, MIDAS GTS NX, ABAQUS, ANSYS, LIRA-CAD.

4) *експериментальні методи* застосовуються під час моніторингу (Keskin, 2008):

- натурні спостереження (геодезія, маркери, інклінометри);
- польові випробування ґрунту (зондування, пресіометрія);
- тензодатчики під фундаментами.

Вибір методу розрахунку напружень під плитним фундаментом (від простих формул до 3D-моделювання) залежить від складності ґрунтової основи, технічного завдання і рівня відповідальності будівлі.

2. Аналітичні методи оцінки напружень під подошвою плитного фундаменту.

Аналітичні методи дають змогу швидко оцінити розподіл напружень у ґрунті з наближеною точністю, спираючись на класичні рішення теорії пружності для однорідного напівпростору під навантаженням:

1) *Метод Буссінеска* (1) дозволяє визначити вертикальне напруження в будь-якій точці напівпростору від точкового навантаження. Для розподіленого навантаження (наприклад, плити) — інтегрується по всій площі плити.

$$\sigma_z = \frac{3Pz^3}{2\pi(r^2+z^2)^{5/2}} \quad (1)$$

де σ_z - вертикальне напруження в точці на

глибині z ; P - сила точкового навантаження; r - горизонтальна відстань від навантаження до точки; z - глибина точки розрахунку.

2) *Метод впливових коефіцієнтів* дозволяє (2) легко обчислити напруження на будь-якій глибині. Для прямокутної, круглої плити або стрічки використовують коефіцієнти Буссінеска, Іштїна, Ньюмарка (табличний або графічний підхід).

$$\sigma_z = q \cdot I \quad (2)$$

де σ_z - вертикальне напруження в точці на глибині z ; q - навантаження; I - коефіцієнт впливу.

3) *Метод кутових точок* (Fadum, 1948) дозволяє визначити напруження у довільній точці під прямокутною площею рівномірного навантаження (3). При цьому часто використовують табличні значення впливових коефіцієнтів або графіки Іштїна, що спрощує обчислення.

$$\sigma_z = \frac{q}{4\pi} [\phi_{(x_1, y_1)} + \phi_{(x_2, y_2)} - \phi_{(x_1, y_2)} - \phi_{(x_2, y_1)}] \quad (3)$$

де σ_z - вертикальне напруження в точці на глибині z ; q - інтенсивність навантаження; ϕ - кут навантаженої площі (4); x_1, x_2, y_1, y_2 - координати кутів навантаженої площі; R - відстань до точки (5).

$$\phi_{(x, y)} = \arctan\left(\frac{xy}{zR}\right) + \frac{xyz}{R(z^2 + x^2 + y^2)} \quad (4)$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (5)$$

4) *Метод Весика* (6) для визначення осідання фундаменту враховує жорсткість плити та припускає, що вона рівномірно розподіляє навантаження на ґрунт (основа — пружна, однорідна, лінійно деформована). Знаючи осідання, можна далі обчислювати тиск і напруження за законами пружності.

$$S = \frac{qB(1-\nu^2)}{E} \cdot I_s \quad (6)$$

де S - осідання фундаменту; q - розподілене навантаження; B - ширина плити; ν - коефіцієнт Пуассона ґрунту; E - модуль пружності ґрунту; I_s - впливовий коефіцієнт Весика.

3. Визначення напружень під плитним фундаментом за допомогою методу кутових точок.

Для дослідження було обрано фундамент, який являє собою монолітну залізобетонну плиту габаритами 1,8 м на 2,6 м, висотою

0,3 м (рис. 1). Фундамент навантажено рівномірно-розподіленим тиском величиною 200 кПа. У якості основи виступає пісок середньої крупності із модулем пружності $E = 30$ МПа та питомою вагою $\gamma = 17$ кН/м³.

Напруження визначались у характерних точках, що були обрані для дослідження (рис. 1). В результаті розрахунку було побудовано епюри напружень від додаткового тиску (σ_{zp}) на глибину 9,9 м, що становить 5,5 ширин фундаменту.

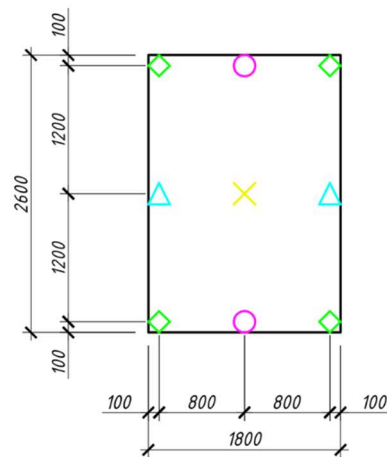


Рис. 1. Схема фундаменту із дослідними точками.
Fig. 1. Foundation plan with test points.

Напруження визначалися починаючи із глибини 0,1 м, із кроком 0,2 м. Такий підхід пов'язаний із тим, що необхідно порівняти результати аналітичного розрахунку із числовим моделюванням у програмному комплексі (ПК) «Midas GTS NX». Крок триангуляції сітки становить 0,2 м. Оскільки зусилля визначаються у центрі скінченного елемента, тому напруження було визначено починаючи із глибини 0,1 м і до 9,9 м, з кроком 0,2 м.

Найбільші напруження виникають під плитою фундаменту у центральній зоні (204 кПа), а найменші – в кутовій зоні (126 кПа). Починаючи із глибини 3 м напруження стають майже однаковими (рис. 2).

4. Визначення напружень під підшвою фундаменту шляхом числового моделювання у ПК «Midas GTS NX»

Числове моделювання, зокрема метод скінчених елементів (МСЕ), є сучасним інженерним інструментом для аналізу взаємодії конструкцій із ґрунтовим середовищем. Його основні переваги:

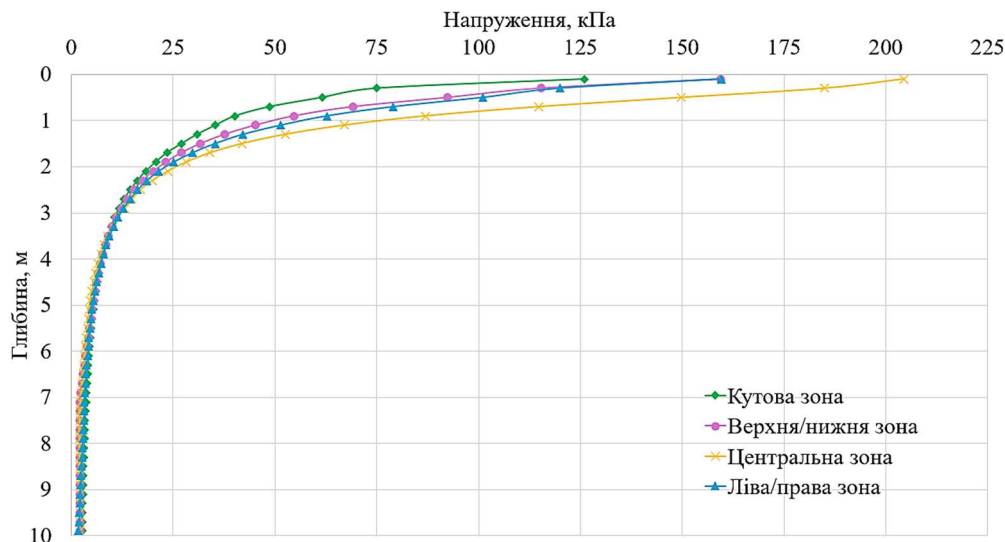


Рис.2. Графік залежності від глибини напружень (кПа) під підшоною фундаменту у характерних точках.

Fig.2. Graph of stress (kPa) distribution versus depth below the foundation base at characteristic points.

- урахування складної геометрії конструкцій та навколишніх об'єктів;
- моделювання реальних геологічних умов із нелінійною поведінкою ґрунтів;
- точне задання навантажень, зокрема нерівномірних, динамічних та від сусідніх споруд;
- деталізація напружено-деформованого стану в усьому ґрунтовому масиві;
- аналіз спільної роботи фундаменту, споруди та ґрунту як єдиної системи;
- можливість моделювання часових процесів — повзучості, ущільнення, аварійних чи циклічних навантажень;
- порівняння та оптимізація проектних рішень;
- інтеграція з моніторингом і створення цифрових моделей для валідації за польовими даними.

Для дослідження було створено розрахункову модель (рис. 3), яка складається із:

- об'ємних скінченних елементів ґрунтового середовища, що володіють пружним (лінійним) законом деформування;
- оболонок (пластин) якими змодельовано фундаментну плиту;
- інтерфейсних елементів на межі контакту оболонки фундаменту та об'ємних скінченних елементів ґрунту.

Елементом ґрунтового середовища присвоєно модуль деформації 30 МПа, питому вагу 17 кН/м^3 , коефіцієнт Пуассона 0,3.

Елементам фундаментної плити присвоєно модуль пружності 30 ГПа, питому вагу 25 кН/м^3 та коефіцієнт Пуассона 0,2. Параметри інтерфейсу: модуль пружності при вертикальному навантаженні $6,35 \cdot 10^5 \text{ кН/м}^3$ і модуль жорсткості при зсуві $57,7 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^3$.

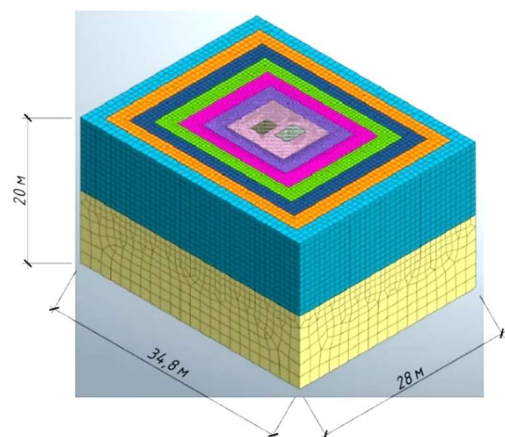


Рис.3. Скінчено-елементна модель.

Fig.3. Finite element model.

Розрахункова модель має змінну триангуляцію від 0,2 м до 2,8 м. Фундаментна плита завантажена рівномірно-розподіленим тиском, який прийнято рівним $q = 200 \text{ кПа}$. За результатами числового моделювання було отримано та проаналізовано напружено-деформований стан ґрунтового середовища, а саме напружень в ґрунті під фундаментною плитою на різній глибині в обраних для дослідження точках в межах площі завантаження (рис. 1).

Напруження у верхній та нижній зоні плити змінювались в діапазоні від 200 кПа на глибині 0,1 м до 4,6 кПа на глибині 9,9 м. Порівняння напружень за числовим моделюванням та аналітичним розрахунком наведені на рис. 4-а та в середньому відрізняються у 2,6 рази. Аналогічна тенденція у лівій та/або правій зоні плити (рис. 4-с).

Напруження у центральній зоні плити змінювались в діапазоні від 110,6 кПа на глибині 0,1 м до 4,74 кПа на глибині 9,9 м. Порівняння напружень за числовим моделюванням та аналітичним розрахунком наведені на рис. 4-б та в середньому відрізняються у 2,73 рази. Слід відмітити, що за числовим моделюванням напруження у центральній зоні майже не змінюються до глибини 0,9 м.

Напруження у кутових зонах плити змінювались в діапазоні від 272,97 кПа на глибині 0,1 м до 4,53 кПа на глибині 9,9 м. Порівняння напружень за числовим моделюванням та аналітичним розрахунком наведені на рис. 4-д та в середньому відрізняються у 2,21 рази. Слід відмітити, що за числовим моделюванням напруження під підшоною фундаменту в кутовій зоні більші в 2,17 рази.

Для більшої наочності відмінностей напружень в залежності від методу розрахунку, під усім фундаментом було побудовано епюри, що наведено на рис. 5.

В результаті порівняння напружень, що виникають в ґрунтовому масиві та які наведені на рис. 5 було виявлено, що характер напружень відрізняється як кількісно так і якісно (мається на увазі за формою оболонки напружень).

На основі цього було визначено коефіцієнт розбіжності напружень для кожної дослідної точки, які було обрано для даного дослідження, на різній глибині та побудовано графік який наведено на рис. 6. Можемо бачити, що напруження які отримані за допомогою аналітичних підходів (методу кутових точок) є меншими у декілька разів. Лише в центральній зоні напруження за аналітичним розрахунком навпаки треба зменшувати, але це тільки до глибини умовних 0,75 м.

Показано, що метод визначення напружень в ґрунтовому масиві впливає на отримані результати. Використання методу

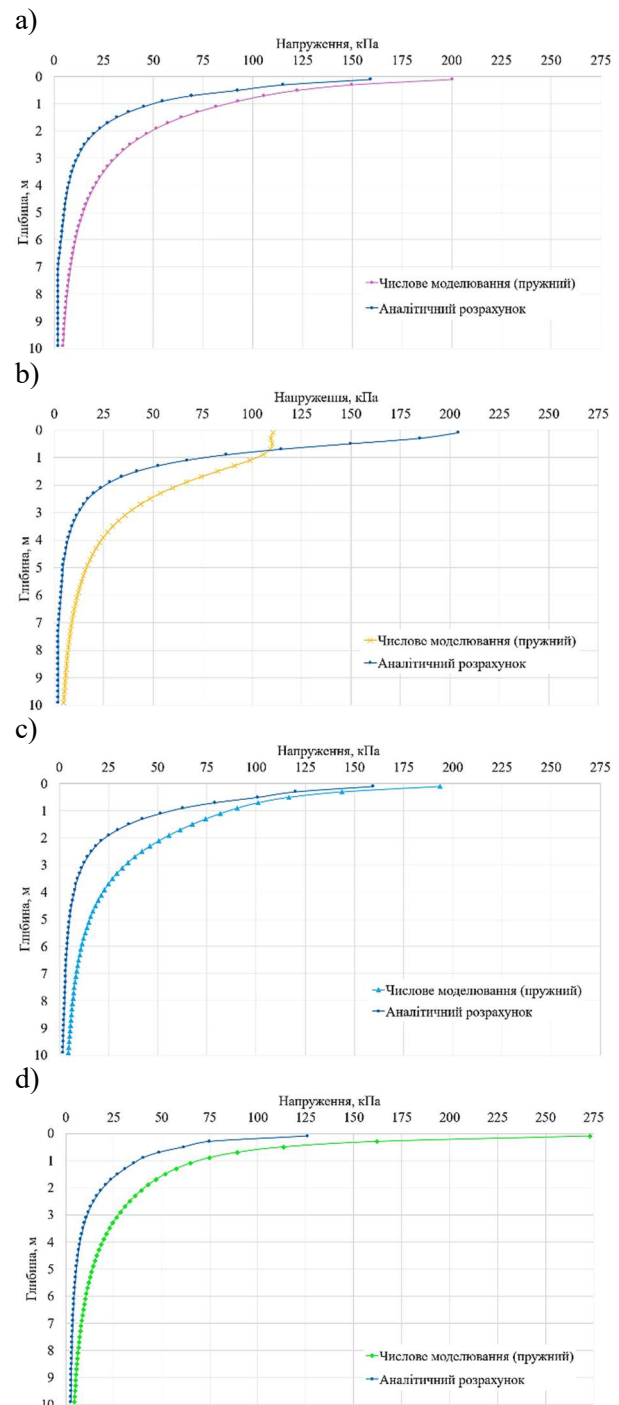


Рис.4. Порівняння напружень в ґрунтовій основі (кПа): а – у верхній та/або нижній зоні плити; б – у центральній зоні плити; с – у лівій та/або правій зоні плити; д – у кутовій зоні плити.

Fig.4. Comparison of stresses in the soil base (kPa): a – in the upper and/or lower zone of the slab; b – in the central zone of the slab; c – in the left and/or right zone of the slab; d – in the corner zone of the slab.

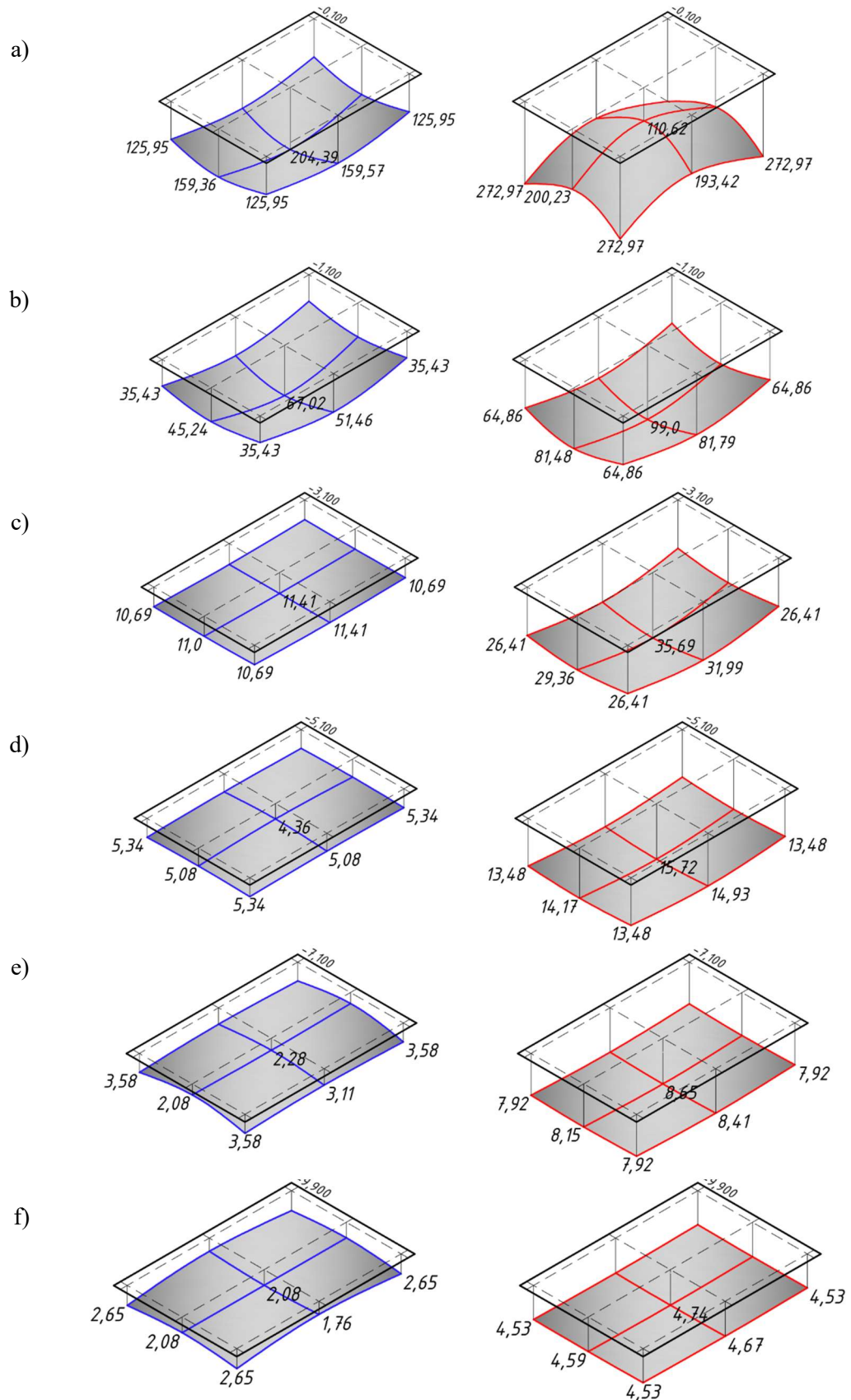


Рис.5. Напруження в ґрунтовому масиві (зліва – аналітичний розрахунок, справа – числове моделювання) на глибині: *a* - 0,1 м; *b* - 1,1 м; *c* - 3,1 м; *d* - 5,1 м; *e* - 7,1 м; *f* - 9,9 м.

Fig.5. Stress in the soil mass (left – analytical calculation, right – numerical simulation) .

кутових точок призводить до занижених результатів в порівнянні із числовим моделюванням (пружний ґрунтовий масив). Слід відмітити, що проблема не в самому методі, а в «коефіцієнтах розсіювання напружень»

α , адже щоб отримати напруження від зовнішніх впливів на певній глибині необхідно перемножити напруження під подошвою фундаменту $\sigma_{zp,0}$, яке є константою, на відповідний «коефіцієнт розсіювання».

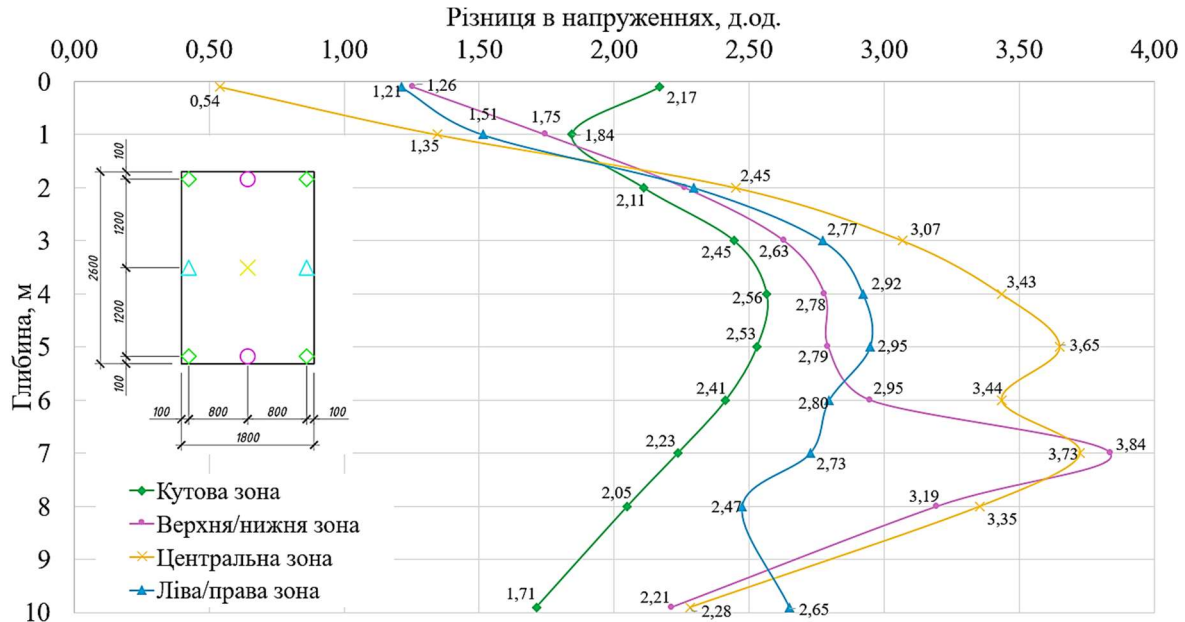


Рис.6. Кількісне порівняння напружень в ґрунтовому масиві в залежності від методу розрахунку.
Fig.6. A quantitative comparison of stresses in a soil mass based on different calculation methods.

ВИСНОВКИ ТА РЕКОМЕНДАЦІЇ

Зафіксовано відмінність, як кількісну так і якісну, характеру розподілу напружень під подошвою фундаменту, за аналітичним підходом і даними числового моделювання:

- напруження в кутовій зоні фундаменту які визначені за аналітичним підходом в середньому будуть меншими в 2,2 рази;
- напруження у верхній та нижній, лівій та правій зоні фундаменту які визначені за аналітичним підходом в середньому будуть меншими в 2,5 рази;
- напруження в центральній зоні фундаменту які визначені за аналітичним підходом в середньому будуть меншими в 2,7 рази.

Виведено коефіцієнт розбіжності та побудовано графіки, які ілюструють різницю напружень за аналітичним розрахунком та числовим моделюванням.

Недооцінка напружень під подошвою фундаменту призводить до некоректного розрахунку осідання, що може призвести до різних ситуацій. Дослідження потребує

продовження із використанням нелінійної (пружно-пластичної) моделі деформування ґрунту із різними параметрами впливу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Жук В., & Павленко І. (2022). Вплив можливого водонасичення лесового ґрунту на напружено-деформований стан фундаментів багатоповерхового будинку. *Основи та фундаменти*, 44, 27-43. DOI: 10.32347/0475-1132.44.2022.27-43
2. Fadum, E. & Ralph. (1948). Influence Values For Estimating Stresses in Elastic Foundation. *Papers of 2nd International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering* (Rotterdam). 77 - 84. https://www.issmge.org/uploads/publications/1/43/1948_03_0020.pdf
3. Keskin, M., Laman, Mustafa, Baran, & Tarık. (2008). Experimental determination and numerical analysis of vertical stresses under square footings resting on sand. *Teknik Dergi/Technical Journal of Turkish Chamber of Civil Engineers*. 19(4), 1263-1279. <https://www.researchgate.net/publication/265077913>

4. Luévano Rojas, A., López Chavarría, S., Medina Elizondo, M., Sandoval Rivas, R., Farías & Montemayor, O. M. (2020). An analytical model for the design of corner combined footings. *Revista ALCONPAT*, 10 (3), 317-335. DOI: 10.21041/ra.v10i3.432
5. Terzaghi, K.V. (1955). Evaluation of coefficient of subgrade reaction. *Geotechnique*. Londres, Vol. 5, No. 4, p. 297-326.

REFERENCES

1. Zhuk V., & Pavlenko I. (2022). Vplyv mozhlivoho vodonasychennia lesovoho gruntu na napruzhenno-deformovanyi stan fundamentiv bahatopoverkhovoho budynku [Influence of possible water saturation of loess soil on the stress-strain state of the foundations of a multi-storey building]. *Osnovy ta fundamenti*, 44, 27-43. (in Ukrainian)
DOI: 10.32347/0475-1132.44.2022.27-43
2. Fadum, E. & Ralph. (1948). Influence Values For Estimating Stresses in Elastics Foundation. *Papers of 2nd International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering* (Rotterdam). 77-84. https://www.issmge.org/uploads/publications/1/43/1948_03_0020.pdf
3. Keskin, M. & Laman, Mustafa & Baran, Tarik. (2008). Experimental Determination and Numerical Analysis of Vertical Stresses Under Square Footings Resting on Sand. *Teknik Dergi/Technical Journal of Turkish Chamber of Civil Engineers*. 19(4), 1263-1279. <https://www.researchgate.net/publication/265077913>
4. Luévano Rojas, A., López Chavarría, S., Medina Elizondo, M., Sandoval Rivas, R., & Farías Montemayor, O. M. (2020). An analytical model for the design of corner combined footings. *Revista ALCONPAT*, 10 (3), 317-335. DOI: 10.21041/ra.v10i3.432
5. Terzaghi, K.V. (1955). Evaluation of coefficient of subgrade reaction. *Geotechnique*. Londres, Vol. 5, No. 4, p. 297-326.

Stress determination in a soil beneath a slab foundation: corner point method and linear elastic modeling

*Ostap KASHOIDA
Oleksandr HAVRYLIUK*

Summary In the current context of construction

industry development—particularly amid rapid urbanization and high urban building density - the process of foundation design has become increasingly complex. Engineers and designers are required to demonstrate a high level of precision, well-founded calculations, and assurance of maximum structural reliability. One of the key and most critical stages of this process is the thorough investigation and analysis of the stress-strain state of the soil foundation, which directly bears the load from the structure. The accuracy of this assessment largely determines the stability, durability, and safety of the entire structure.

The assessment of stresses beneath the foundation base can be performed with varying levels of accuracy—ranging from simple analytical formulas to full 3D modeling that accounts for the nonlinear behavior of soil under loading. The choice of method depends on the complexity of the structure, the engineering and geological conditions, the level of structural responsibility, and the required accuracy of the calculations.

The presented study on the influence of the stress calculation method beneath the foundation base is conducted using the example of a rectangular slab foundation on a single-layer soil base composed of medium-density sand. The stresses were determined using an analytical approach—specifically, the corner point method—and compared with the results of numerical simulation of foundation–soil interaction.

For the numerical simulation, the software package Midas GTS NX was used. The soil mass was modeled using volumetric finite elements and a linear-elastic model to represent the soil's behavior under loading.

A discrepancy was observed between the analytically determined stresses and the actual pattern of stress distribution beneath the foundation. An error in the analytical method of stress evaluation using the corner point method was identified, particularly in estimating contact stresses at the foundation base level. Correlation coefficients are proposed for the central and peripheral zones of the slab foundation to improve the reliability of analytical stress calculation results beneath the foundation. Further research is planned to analyze the influence of the soil environment model, soil base parameters, and the magnitude of pressure on the foundation soil.

Key words. Slab foundation, soil base, stress, Fadum (corner) method, numerical simulation, MIDAS GTS NX, linear elastic model.