

Порівняння аналітичного та числового підходів до визначення напружень у ґрунті під плитним фундаментом

Остан КАШОЇДА¹, Вероніка ЖУК²

Київський національний університет будівництва і архітектури
31, просп. Повітряних Сил, Київ, Україна, 03037

¹kashoida_oo@knuba.edu.ua, <https://orcid.org/0000-0002-9234-4489>

²zhuk.vv@knuba.edu.ua, <https://orcid.org/0000-0002-1114-3192>

DOI: 10.32347/0475-1132.51.2025.75-82

Анотація. Проектування плитних фундаментів ґрунтується на правильній оцінці взаємодії конструкції з ґрунтовою основою, зокрема на достовірному визначенні контактних напружень. Вибір методу розрахунку має безпосередній вплив на результати оцінки несучої здатності та прогнозування деформацій основи. Традиційно для інженерної практики широко застосовуються аналітичні методи, зокрема метод кутових точок, завдяки їх простоті та відносно невеликій трудомісткості. Проте такі методи спираються на спрощені припущення щодо напружено-деформованого стану ґрунту, що може призводити до помилок у специфічних умовах, наприклад при нерівномірному навантаженні, складній геометрії або неоднорідності основи.

Сучасні числові методи, зокрема моделювання методом скінчених елементів, дають змогу враховувати складніший характер роботи ґрунту, включаючи пружно-пластичні властивості та реалістичні граничні умови. Проте, вони вимагають значних обчислювальних ресурсів, досвіду роботи зі спеціалізованим програмним забезпеченням та детальної вихідної інформації про властивості ґрунтів.

Дослідження результатів, отриманих аналітичним методом і числовим моделюванням, є актуальним як з точки зору перевірки точності та меж застосування традиційних підходів, так і для уточнення впливових коефіцієнтів та адаптації розрахункових методик до сучасних вимог. Розуміння відмінностей у кількісних та якісних результатах дозволить інженерам обґрунтовано обирати метод розрахунку залежно від умов проектування, а також оптимізувати співвідношення між точністю, ресурсами та часом виконання розрахунків.



Остан КАШОЇДА

доцент кафедри
геотехніки
PhD



Вероніка ЖУК

доцент кафедри
геотехніки
к.т.н., доц.

У статті представлено результати порівняння визначення контактних напружень у ґрунтовій основі під плитним фундаментом прямокутної форми, отриманих за аналітичним методом кутових точок та шляхом числового моделювання у середовищі скінчено-елементного аналізу для пружно-лінійної та пружно-пластичної моделей (з використанням критерію міцності Кулона–Мора).

Метою дослідження є уточнення коефіцієнтів впливу, що застосовуються в методі кутових точок, а також виявлення кількісних і якісних розбіжностей між підходами та окреслення меж їх коректного застосування. Порівняння показало суттєві відмінності не лише у величинах контактних напружень, але й у формі поверхні їх розподілу. Попередньо визначено коефіцієнти розбіжності для дослідженого випадку.

Ключові слова. Плитний фундамент, ґрунтова основа, напруження, метод кутових точок, числове моделювання, MIDAS GTS NX, лінійно-пружна модель, модель Кулона–Мора.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Для розрахунку напружень у ґрунтовій основі існують різні підходи - від спрощених аналітичних методів (Rojas, 2020; Fadum, 1948; Terzaghi, 1955) до складних числових моделей (Бойко, 2023; Keskin, 2008). Аналітичні рішення, засновані на ряді припущень, зазвичай застосовуються для попередніх інженерних оцінок. Натомість числове моделювання дає змогу врахувати ширший спектр факторів, що впливають на формування напруженого стану під фундаментом.

У проектуванні фундаментів важливо враховувати нелінійну поведінку ґрунтів, оскільки їхня жорсткість змінюється залежно від рівня напружень, ступеня ущільнення та тривалості навантаження. Лінійно-пружні моделі, хоча й зручні, не відображають реальних меж міцності ґрунту. Використання нелінійних підходів дозволяє точніше оцінити осідання, розподіл напружень і забезпечити більшу надійність фундаментних конструкцій, особливо в складних інженерно-геологічних умовах.

МЕТА РОБОТИ

Метою дослідження є порівняльна оцінка ефективності методу кутових точок для визначення напружень у ґрунтовій основі під фундаментом шляхом зіставлення з результатами числового моделювання, зокрема лінійно-пружної моделі та моделі Мора-Кулона. Робота спрямована на оцінку точності, доцільності та практичного потенціалу аналітичного підходу в умовах складного напруженого стану, характерного для реального ґрунтового середовища.

ОСНОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ

1. Методи визначення напружень в основі плитного фундаменту.

Для визначення напружень у ґрунтовій основі застосовують 4 підходи:

1) *аналітичні методи* (Буссінеска, кутових точок, Весика, Федорова-Садовського) — базуються на теорії пружності,

використовуються для попередніх оцінок;

2) *напіваналітичні методи*. (моделі Вінклера, Пастернака, Кисельова-Алексєєва) — ґрунт моделюється як пружна основа з реактивним опором;

3) *числові методи* (МСЕ) — дають змогу моделювати складну геометрію, властивості ґрунтів і граничні умови (PLAXIS, MIDAS GTS NX, ABAQUS, тощо);

4) *експериментальні методи* — натурні спостереження, польові випробування та тєнзометрія використовуються для верифікації розрахунків.

Оцінка напружень під плитним фундаментом може виконуватися з різним рівнем точності - від простих аналітичних формул до повноцінного 3D-моделювання. Вибір методу залежить від інженерного завдання, складності ґрунтових умов майданчика та ступеня відповідальності об'єкта.

2. Розрахунок напружень під плитним фундаментом методом кутових точок.

Метод кутових точок (Fadum, 1948) розглядає проекцію навантаженої прямокутної області на горизонтальну площину, де точка розрахунку (на глибині z) знаходиться в центрі. Від кожного з чотирьох кутів прямокутника визначається "внесок" у загальний впливовий коефіцієнт. Перевагою методу можна назвати простоту застосування. Обмеженням методу є неможливість застосування для складної геометрії площі завантаження, неврахування властивостей ґрунту.

Дослідження було виконано на прикладі фундаменту, який являє собою монолітну залізобетонну плиту з габаритами в плані $1,8 \times 2,6$ м, товщиною 0,3 м. Фундамент навантажено тиском $q = 200$ кПа. У якості основи було розглянуто пісок середньої крупності.

Напруження визначались в обраних для дослідження точках в плані фундаменту, які знаходяться по центру, на кутах та середині кожної грані плити.

В результаті розрахунку було побудовано епюри додаткових напружень σ_{zp} (рис. 1) на глибину 9,9 м, що становить $5,5b$ (ширин фундаменту). Оскільки в рамках дослідження результати розрахунків методом кутових точок потрібно було порівняти з даними числового моделювання, а результати числового

модельовання дають напруження у центрі кожного скінченного елемента (СЕ), тому (при кроці триангуляції сітки 0,2 м) напруження розраховувалися аналітичним шляхом починаючи із глибини 0,1 м від підшви фундаменту з кроком 0,2 м вниз.

За результатами аналітичного розрахунку зафіксовано найбільші значення контактних напружень (204 кПа) - у центральній зоні, а найменші (126 кПа) - в кутових зонах. Починаючи із глибини 3 м напруження за величиною стають практично однаковими в межах площі підшви плити (рис. 1).

3. Напруження під підшвою фундаменту за результатами числового моделювання у ПК «Midas GTS NX»

Числове моделювання, зокрема, метод скінчених елементів (МСЕ) є сучасним інженерним інструментом для врахування взаємодії конструкцій із ґрунтовим масивом. Перевагами такого підходу можна назвати:

- можливість врахування складної геометрії та реальних умов (наявність отворів у конфігурації фундаменту; наявність суцільних споруд, підземних комунікацій);
- урахування реальних геологічних умов (багатошарова ґрунтова товща з різними фізико-механічними властивостями, з нелінійними закономірностями поведінки);
- точне врахування навантаження (нерівномірний розподіл навантаження, тимчасові та динамічні навантаження, врахування навантаження від оточуючих споруд);
- аналіз напружено-деформованого стану в усьому масиві (детальна картина напружень, переміщень, деформацій);
- оцінка спільної роботи всіх елементів системи (повноцінна модель системи «ґрунтовий масив – фундамент – споруда», визначення деформацій конструкцій з врахуванням поведінки ґрунтів);
- прогнозування поведінки з часом (моделювання повзучості, ущільнення, реології ґрунтів; розрахунок циклічних або аварійних сценаріїв);
- порівняння альтернативних варіантів (можливість оцінити кілька рішень, можливість оптимізації конструктивної

схеми);

- інтеграція з геотехнічним моніторингом (можливість валідації моделі за польовими даними, створення цифрових двійників для систем спостереження за деформаціями в реальному часі).

Для дослідження було виконано числове моделювання у програмному комплексі (ПК) «Midas GTS NX». Для розрахунку було створено скінчено-елементну модель (рис. 2), яка складається із:

- об'ємних скінчених елементів ґрунтового середовища;
- оболонки (пластин) для моделювання плити фундаменту;
- інтерфейсних елементів на межі контакту фундаменту та ґрунтового масиву.

Габарити ґрунтового масиву для розрахункової моделі прийнято $28 \times 35 \times 20$ м. Сітка СЕ має змінну триангуляцію в плані і по глибині, що змінюється в діапазоні від 0,2 м (під фундаментом) до 2,8 м (на нижній грані розрахункової області).

В дослідженні було виконано два варіанти розрахунків взаємодії фундаменту з ґрунтом:

1) пружний ґрунтовий масив з лінійним законом деформування (параметри моделі: модуль пружності $E = 30$ МПа, питома вага $\gamma = 18$ кН/м³, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$);

2) пружно-пластичний закон деформування ґрунту з критерієм міцності Мора-Кулона (параметри моделі: модуль пружності $E = 30$ МПа, питома вага $\gamma = 18$ кН/м³, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, питоме зчеплення $c = 1$ кПа, кут внутрішнього тертя $\varphi = 35^\circ$, кут дилатансії $\psi = 10^\circ$).

Скінченим елементам фундаментної плити присвоєно модуль пружності $E = 30$ ГПа; питома вага $\gamma = 25$ кН/м³; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.2$.

Параметри інтерфейсів: модуль пружності при нормальному (вертикальному) навантаженні $K_n = 6,35 \cdot 10^5$ кН/м³; модуль жорсткості при зсуві $K_t = 57,7 \cdot 10^3$ кН/м³; питоме зчеплення $c = 0,5$ кПа; кут внутрішнього тертя $\varphi = 19,3^\circ$.

Плита завантажена рівномірно-розподіленим тиском $q = 200$ кПа. Для варіанту нелінійного розрахунку було застосовано систему «монтаж», що враховує поетапне

влаштування елементів моделі та прикладання навантаження:

- 1) ґрунтовий масив із власною вагою ґрунту;
- 2) занулення переміщень від власної ваги ґрунту;
- 3) влаштування фундаменту та інтерфейсів на межі контакту бетону з ґрунтом із прикладанням 50% навантаження на плиту;
- 4) прикладання решти 50% навантаження.

Кожна стадія була розбита на ітерації для досягнення потрібної точності розрахунку. Також було враховано критерії збіжності результатів по переміщенням (0,1%) і по навантаженню (0,1%).

В результаті числового моделювання було отримано та проаналізовано напруження в ґрунті (рис. 2) в обраних для дослідження точках в плані і на різній глибині від фундаментної плити та побудовано епюри (рис. 1). Ізополя (рис. 2) ілюструють саме напруження від зовнішніх впливів σ_{zp} в межах габариту фундаменту на глибину до 20 м.

Аналіз результатів показав, що напруження у кутових зонах плити (рис. 1-а) змінювались в діапазоні від 272,97 кПа – пружний ґрунтовий масив, до 125,95 кПа – аналітичний розрахунок. Порівняння напружень за числовим моделюванням та аналітичним розрахунком показало в середньому різницю у 2,2 рази. Слід відмітити, що за числовим моделюванням напруження під підшоною фундаменту в кутовій зоні, починаючи з глибини 2 м і нижче, майже не відрізняються.

Максимальні напруження у верхній та нижній зоні плити (рис. 1-б) на глибині 0,1 м сягають 213,21 кПа – критерій міцності Мора-Кулона, мінімальні – 159,36 кПа при використанні аналітичного розрахунку. Слід відмітити, що на глибині 4 м і нижче напруження в обох методах моделювання майже не відрізняються. Розбіжність напружень за числовим моделюванням та аналітичним розрахунком в середньому складає 2,7 рази.

Напруження у центральній зоні плити (рис. 1-с) змінювались в діапазоні від 204,39 кПа – за аналітичним розрахунком, до 110,62 кПа – пружний ґрунтовий масив, на глибині 0,1 м. Порівняння напружень за числовим моделюванням та аналітичним розрахунком показало в середньому різницю у

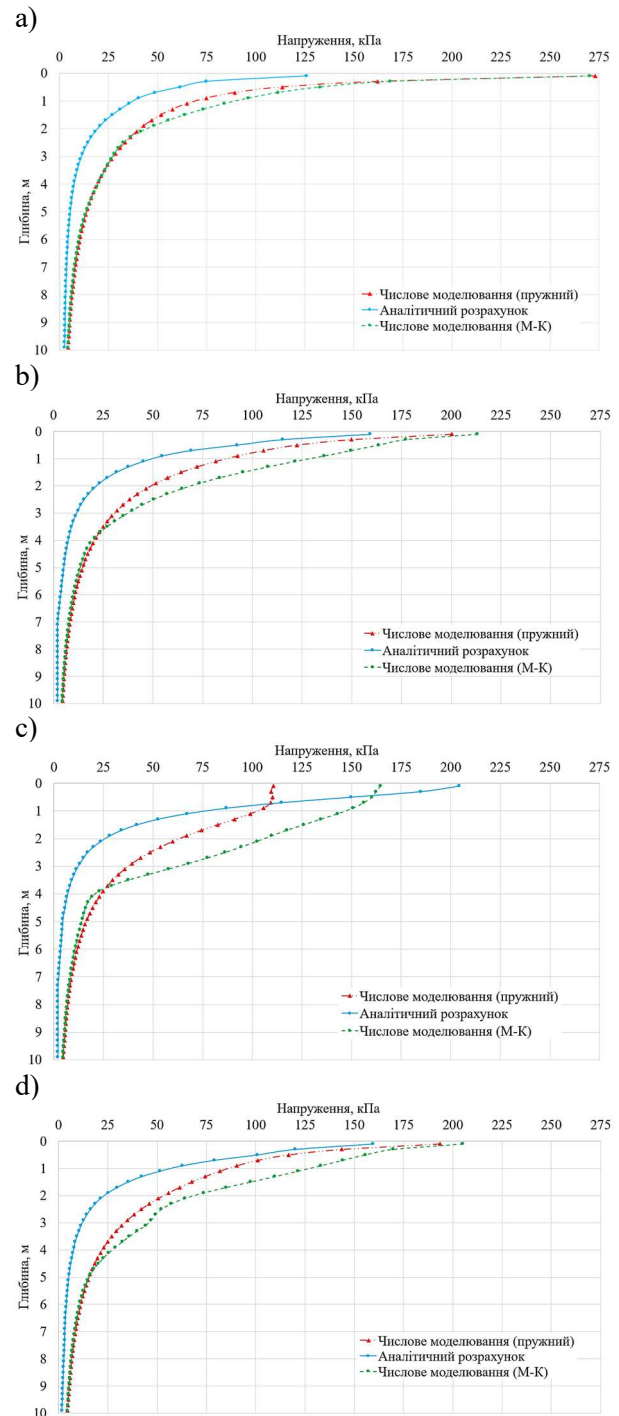


Рис.1. Напруження в основі (кПа) за даними методу кутових точок і числового моделювання: а – кутова зона плити; б – верх та низ плити; с – центр плити; д – ліва та права зони плити.

Fig.1. Stresses in the soil base (kPa) by corner method calculation and numerical simulation: а – slab corners; б – top and bottom of the slab; с – central zone of the slab; д – left and right zone of the slab.

2,8 рази. Слід відмітити, що за результатами-числовим моделюванням напруження у центральній зоні майже не змінюються до глибини 0,9 м.

Максимальні напруження у лівій та правій зоні плити (рис. 1- *d*) змінювались в діапазоні від 205,07 кПа – критерій міцності Мора-Кулона до 159,57 кПа – аналітичний розрахунок. Розбіжність напружень за числовим моделюванням та аналітичним розрахунком в середньому склало 2,6 рази.

Для зручності аналізу результатів аналітичної методики розрахунку (метод кутових точок) та даних числового моделювання, для більшої наочності відмінності напружень під фундаментом, в залежності від методу розрахунку, було побудовано поверхні для додаткових напружень на різних глибинах від плити (рис. 3).

За результатами порівняння напружень в ґрунтовому масиві за різними методиками (рис. 3) було виявлено, що характер формування зони додаткових напружень відрізняється як кількісно так і якісно (форма поверхонь для додаткових напружень).

На основі порівняння даних застосування різних методик було визначено коефіцієнт розбіжності напружень для точок, які було

обрано для дослідження на різній глибині та побудовано графік (рис. 4). Аналізуючи графіки, можемо бачити, що напруження, отримані за допомогою аналітичних підходів (методу кутових точок) є заниженими. Лише в центральній зоні напруження за аналітичним розрахунком навпаки завищені, але ця тенденція зберігається тільки до глибини умовних 0,5 м.

Точне визначення контактних напружень у ґрунтовій основі є ключовим для надійного проектування плитних фундаментів. Традиційні аналітичні методи, зокрема метод кутових точок, мають переваги простоти, але ґрунтуються на спрощених припущеннях, що зумовлювати похибки результатах розрахунків.

Аналіз результатів застосування різних методик показав, що числове моделювання методом скінчених елементів дозволяє враховувати більш реалістичну поведінку ґрунту.

Отримані результати підтверджують, що навіть для відносно простої геометрії та умов навантаження розбіжності між методами можуть мати істотний вплив на оцінку несучої здатності та рівномірності роботи ґрунтової основи.

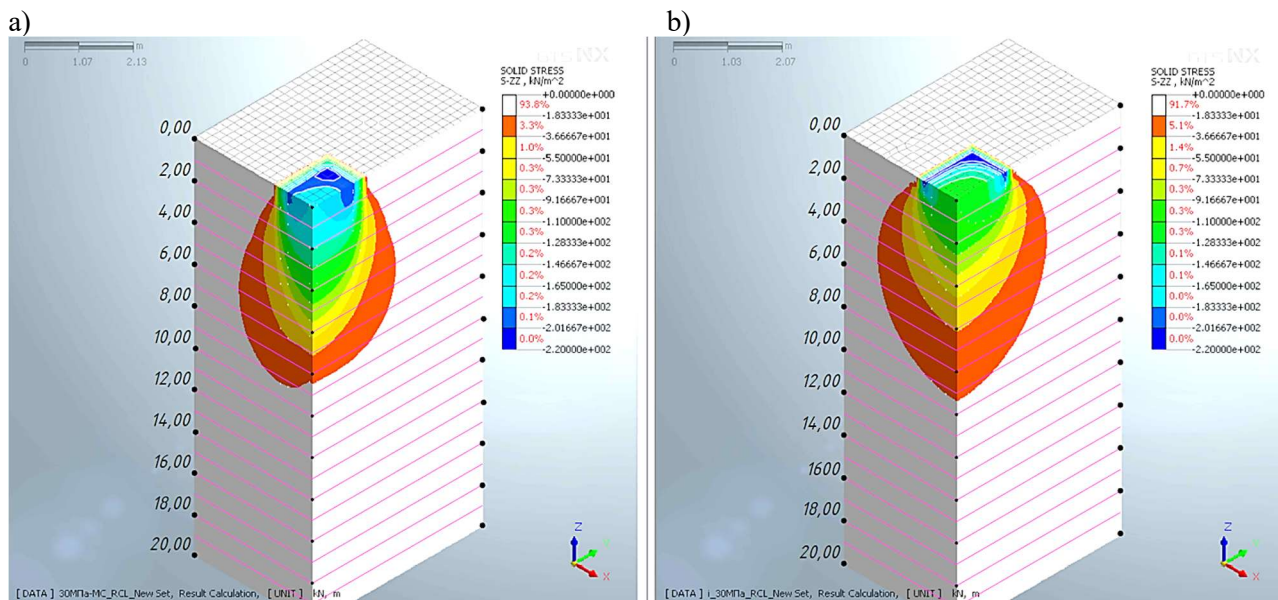


Рис.2. Додаткові напруження (кПа) в ґрунтовому масиві під фундаментом за даними числового моделювання у Midas GTS NX: *a* - пружно-пластична модель, *b* – лінійно-пружна модель поведінки ґрунту.

Fig.2. Additional stresses (kPa) in the soil mass beneath the foundation according to numerical modeling in Midas GTS NX: *a* - Mohr–Coulomb model; *b* - linear elastic model.

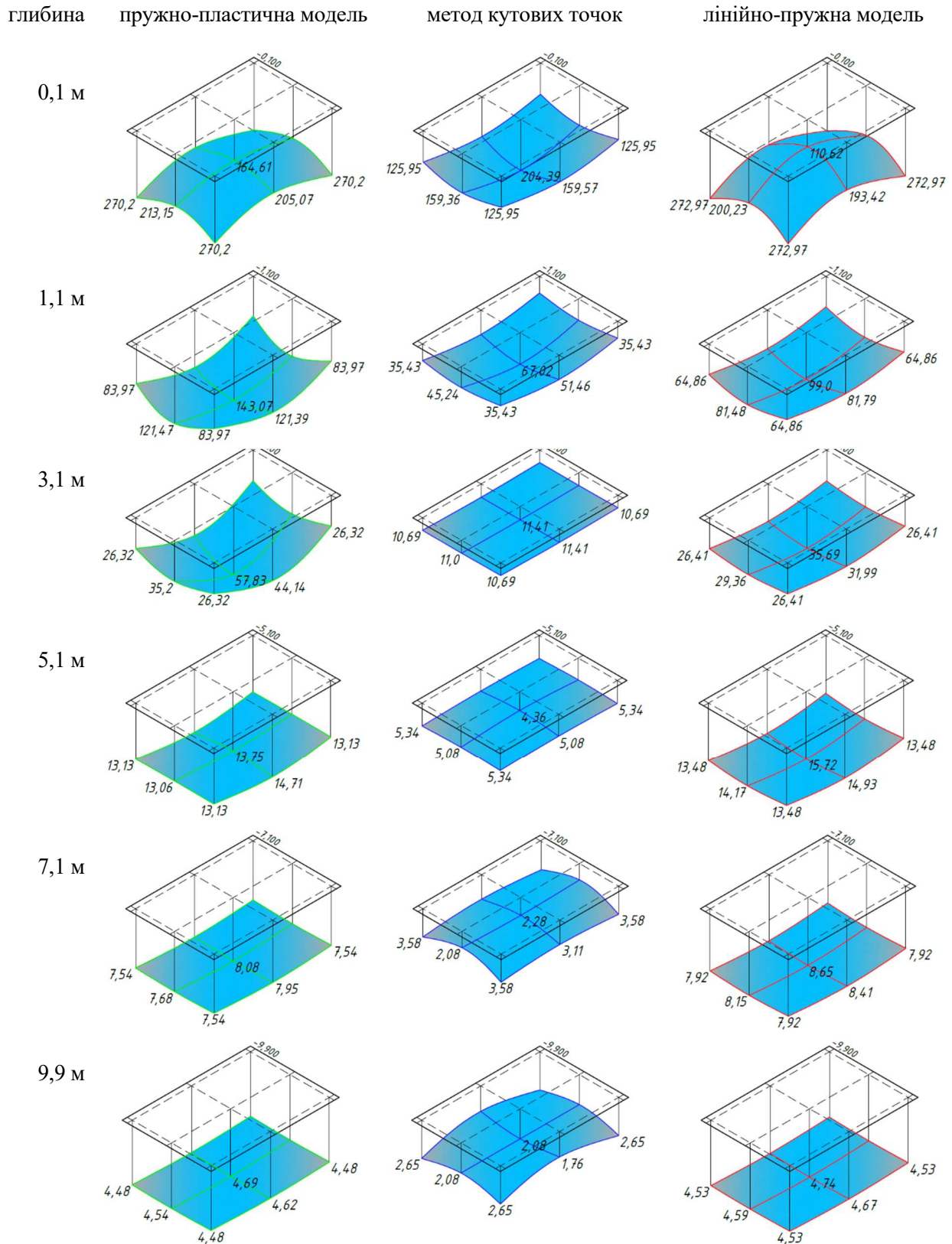


Рис.3. Поверхні додаткових напружень (кПа) в ґрунті на різній глибині від підшви плитного фундаменту.

Fig.3. Additional stress surfaces (kPa) in the soil at various depths below the base of the slab foundation.

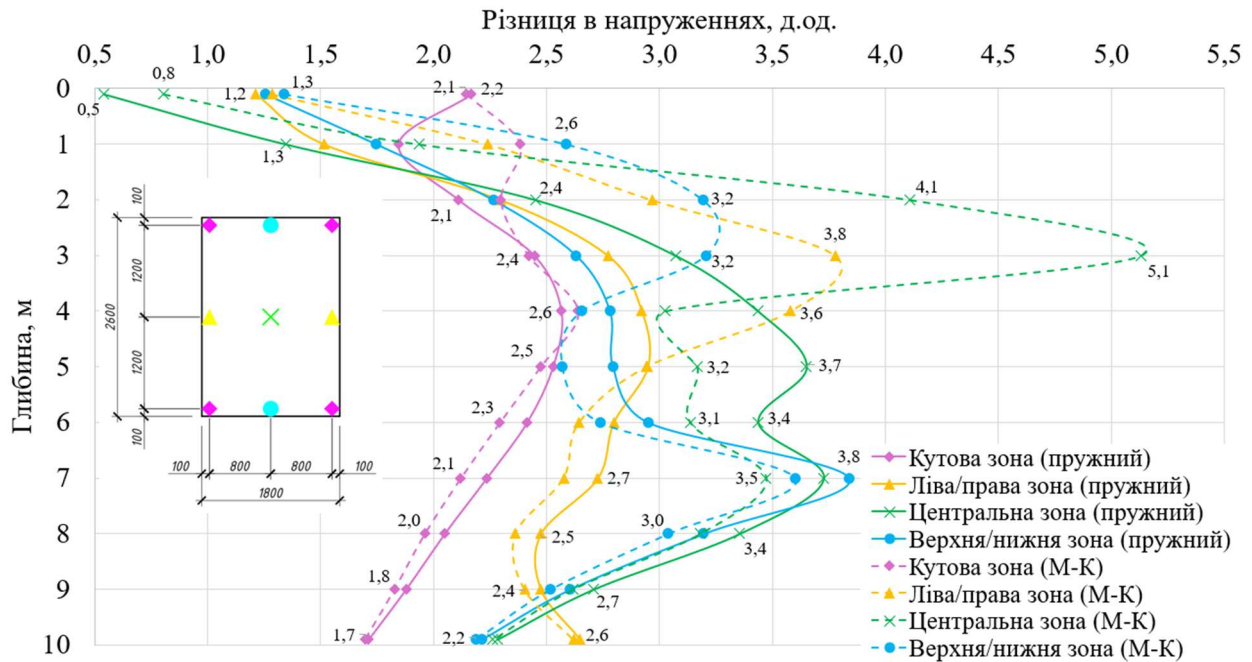


Рис.4. Кількісне порівняння напружень в ґрунтовому масиві в залежності від методу розрахунку.
Fig.4. A quantitative comparison of stresses in a soil mass based on different calculation methods.

ВИСНОВКИ ТА РЕКОМЕНДАЦІЇ

Показано, що аналітичні методи — це ефективний інструмент для попередньої оцінки напружень під плитами, проте область їх застосування обмежується наступними критеріями: проста геометрія фундаменту, однорідна ґрунтова основа, рівномірне навантаження. У складніших випадках доцільно їх поєднувати з числовим моделюванням.

Розглянуто порівняльний аналіз результатів визначення контактних напружень у ґрунтовій основі під плитним фундаментом прямокутної форми, отриманих за допомогою аналітичного підходу - методу кутових точок та числового моделювання методом скінченних елементів для двох підходів стосовно опису поведінки ґрунту: пружно-лінійної моделі та пружно-пластичної моделі з критерієм міцності Кулона–Мора.

Запропоновано уточнення коефіцієнтів впливу, що застосовуються в методі кутових точок.

Виявлено кількісні та якісні розбіжності між результатами, отриманими різними методами. Визначено коефіцієнти розбіжності для дослідженого випадку.

Запропонований підхід створює передумови для подальшого комплексного дослідження впливу геометричних параметрів

фундаменту, виду та величини навантаження, а також фізико-механічних властивостей ґрунту на узгодженість результатів аналітичних та числових методів розрахунку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Fadum, E. Ralph. (1948). Influence Values For Estimating Stresses in Elastic Foundation. *Papers of 2nd International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering* (Rotterdam). 77-84.
https://www.issmge.org/uploads/publications/1/43/1948_03_0020.pdf
2. Keskin, M., Laman, M., & Baran, T. (2008). Experimental Determination and Numerical Analysis of Vertical Stresses Under Square Footings Resting on Sand. *Teknik Dergi/Technical Journal of Turkish Chamber of Civil Engineers*. 19(4), 1263-1279.
<https://www.researchgate.net/publication/265077913>
3. Luévanos Rojas, A., López Chavarria, S., Medina Elizondo, M., Sandoval Rivas, R., & Farías Montemayor, O. M. (2020). An analytical model for the design of corner combined footings. *Revista ALCONPAT*, 10 (3), 317-335.
DOI: 10.21041/ra.v10i3.432
4. Terzaghi, K.V. (1955). Evaluation of coefficient of subgrade reaction. *Geotechnique*. Londres, Vol. 5, No. 4, p. 297-326.
5. Бойко І., Кривенко О., Гаврилук О. (2023).

Числове моделювання взаємодії бурової палі та основи з врахуванням дилатансії ґрунту. *Основи та фундаменти*, 46, 9-16. DOI: 10.32347/0475-1132.46.2023.9-16

REFERENCES

1. Fadum, E. Ralph. (1948). Influence Values For Estimating Stresses in Elastic Foundation. *Papers of 2nd International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering* (Rotterdam). 77-84. https://www.issmge.org/uploads/publications/1/43/1948_03_0020.pdf
2. Keskin, M., Laman, M., & Baran, T. (2008). Experimental Determination and Numerical Analysis of Vertical Stresses Under Square Footings Resting on Sand. *Teknik Dergi/Technical Journal of Turkish Chamber of Civil Engineers*. 19(4), 1263-1279. <https://www.researchgate.net/publication/265077913>
3. Luévanos Rojas, A., López Chavarría, S., Medina Elizondo, M., Sandoval Rivas, R., Farías Montemayor, O. M. (2020). An analytical model for the design of corner combined footings. *Revista ALCONPAT*, 10 (3), 317-335. DOI: 10.21041/ra.v10i3.432
4. Terzaghi, K.V. (1955). Evaluation of coefficient of subgrade reaction. *Geotechnique*. Londres, Vol. 5, No. 4, p. 297-326.
5. Boiko I., Kryvenko O., & Havryliuk O. (2023). Chyslove modeliuvannia vzaïemodii burovoi pali ta osnovy z vrakhuvanniam dylatansii ґрунту [Numerical simulation of interaction bored pile and soil mass with taking into account the dilatancy of the soil]. *Osnovy ta fundamenti*, 46, 9-16. (in Ukrainian) DOI: 10.32347/0475-1132.46.2023.9-16

Comparison of analytical and numerical approaches for stress analysis beneath a slab foundation

Ostap KASHOIDA
Veronika ZHUK

Summary The design of slab foundations relies on the accurate assessment of the interaction between the structure and the soil base, particularly on the reliable determination of contact stresses. The choice of calculation method directly affects the results of bearing capacity evaluation and the

prediction of soil deformations. Analytical approaches, such as the corner points method, are traditionally widely used in engineering practice due to their simplicity and relatively low labor intensity. However, these methods are based on simplified assumptions regarding the stress-strain state of the soil, which can lead to errors under specific conditions, such as non-uniform loading, complex geometry, or heterogeneous soil composition.

Modern numerical methods, particularly finite element modeling, allow for a more detailed consideration of soil behavior, including elastic-plastic properties and realistic boundary conditions. Nevertheless, they require significant computational resources, expertise in specialized software, and comprehensive input data on soil properties.

Therefore, a comparative study of the results obtained using the analytical corner points method and numerical modeling is relevant both for verifying the accuracy and applicability limits of traditional approaches and for refining influence coefficients to adapt calculation methods to current engineering requirements. Understanding the quantitative and qualitative differences between these methods will enable engineers to make informed decisions when selecting a calculation approach depending on the design conditions, while also optimizing the balance between accuracy, available resources, and calculation time.

The article presents a comparison of contact stresses in a soil base under a rectangular slab foundation obtained by the analytical corner points method and finite element numerical modeling for elastic-linear and elastic-plastic soil models (with the Mohr-Coulomb strength criterion).

The aim of the study is to refine the influence coefficients used in the corner points method, to identify quantitative and qualitative differences between the approaches, and to outline the boundaries of their correct application. The comparison revealed significant discrepancies not only in the values of contact stresses but also in the shape of their distribution surface. Preliminary discrepancy coefficients for the studied case have been determined.

Key words. Slab foundation, soil base, stress, corner method, numerical simulation, MIDAS GTS NX, linear elastic model, Mohr-Coulomb model.