

Механіка деформування підсилених фундаментів за методом граничних елементів

Алла МОРГУН¹, Іван МЕТЬ², Дмитро ЗАПИСОВ³, Андрій КОЛЕСНИК⁴

^{1,2,3,4} Вінницький національний технічний університет

95, Хмельницьке шосе, Вінниця, Україна, 21000,

¹morgunallaS@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-4701-339X>

²met@vntu.edu.ua, <https://orcid.org/0000-0001-9764-0271>

³dzapisov@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0000-0001-4961>

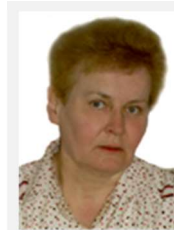
⁴andrey.engineer@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0000-8001-2527>

Анотація. Деформування ґрунтів під навантаженням являє собою складний процес. Це зумовлено неоднорідністю середовища ґрунтових масивів, складні геометричні форми фундаментів, нерівномірне навантаження на ґрунти. Нелінійність передбачає, що співвідношення між компонентами напружено-деформованого стану змінюється в процесі його зміни. Знайти точні аналітичні рішення для прогнозування напружено-деформаційного стану ґрунту дуже складно. Задачі нелінійної деформації ґрунтів можуть вирішуватися чисельними методами, які дозволяють уникнути застосування спрощених передумов, які приймаються в аналітичних методах.

Робота присвячена удосконаленню методики розрахунку напружено-деформованого стану підсилених фундаментів за сучасним числовим методом граничних елементів (МГЕ) з метою практичного застосування, прийняття рішень про їх несучу спроможність. Підсилення фундаментів має за мету пристосування їх до безаварійності роботи в змінних умовах експлуатації.

При обчисленні задачі про взаємодію фундаменту з пружним середовищем в якості фундаментального рішення використано розв'язки Р. Міндліна, оскільки тиск від фундаменту в ґрунті прикладається не до поверхні ґрунту, а на деякій глибині всередині масиву ґрунту.

При проведенні розрахунку гранична поверхня фундаменту дискредитувалась граничними елементами, активна зона навколофундаментного ґрунту дискредитувалась трикутними осередками.



Алла МОРГУН

професор кафедри будівництва,
міського господарства та
архітектури
д.т.н., професор



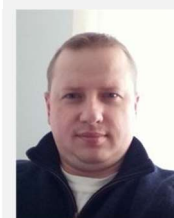
Іван МЕТЬ

декан ФБЦЕІ ВНТУ
к.т.н., доцент



Дмитро ЗАПИСОВ

аспірант кафедри будівництва,
міського господарства та
архітектури



Андрій КОЛЕСНИК

аспірант кафедри будівництва,
міського господарства та
архітектури

Розрахунок проведено з урахуванням дилатансійних властивостей ґрунту будівельного майданчика та використанням пружно-пластичної моделі ґрунтової основи. Тема роботи, яка присвячена удосконаленню розрахунково-теоретичного апарату проектування підсилених фундаментів споруд, є

актуальною на сьогоднішній час.

Прикладання МГЕ до розв'язку практичної задачі геомеханіки, процесу осідання основ, та допустимих навантажень на них підкріплено та проілюстровано даними числового розрахунку підсиленних стовпчастих фундаментів мілкового закладання.

В результаті дослідження, співставляючи дані числового розрахунку і натурального експерименту, значення несучої спроможності як підсиленого, так і не підсиленого фундаментів практично співпадають.

Ключові слова. Несуча спроможність, підсилення фундаменту, метод граничних елементів, напружено-деформований стан.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ ТА АНАЛІЗ ПОПЕРЕДНІХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Підсилення фундаментних конструкцій викликає необхідність робити прогнози напружено-деформованого стану (НДС) оточуючого геологічного середовища, використовуючи досягнення сучасної прикладної геомеханіки в будівництві. Підсилення фундаментів є актуальною задачею сьогодення.

В роботі розглянуто питання визначення несучої спроможності підсиленних фундаментів мілкового закладання палями, заглибленими за допомогою пневмопробійників під фундамент. Використання пневмопробійників суттєво скорочує об'єми земляних робіт. Невеликі габарити і мала маса пневмопробійників дозволяє влаштовувати палі всередині будівлі в приміщеннях висотою до 2 м поряд із стінами, забивати труби $d=150-325$ мм, внутрішній простір яких заливається бетонною сумішшю.

Експериментальне дослідження фундаментів, підсиленних набивними палями, проводилось на полігоні (Козаков та ін., 1990). Фундамент з розмірами в плані $1,0 \times 1,0$ м глибиною закладання 0,5 м був підсилений чотирма набивними палями довжиною 2,5 м з використанням пневмопробійників. Набивні палі підсилення виготовлялись таким чином, щоб частина перетину палі підсилення знаходилась під подошвою фундаменту який

підсилюється. Це досягалось тим, що перша свердловина пробивалась пневмопробійником безпосередньо поряд з граню подошви, а потім засипалась напівсухою бетонною сумішшю, яка при наступних проходках пробійника виштовхувалась в оточуючий ґрунт та під подошву фундаменту, створюючи при цьому опорну консоль, рисунок 1, (Козаков та ін., 1990). При чотирьохразовій проходці діаметр палі підсилення склав 270 мм, розміри консолі – 4-5 см.

Згідно експерименту (Козаков та ін., 1990) після підсилення несуча спроможність фундаменту збільшилась майже в чотири рази, рисунок 3,б.

Проведені дослідження дозволили рекомендувати запропонований метод підсилення стрічкових фундаментів мілкового закладання в пілувата-глинистих ґрунтах для практичного використання.

ОСНОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ

В роботі за числовим МГЕ скомпоновано методику прогнозування напружено-деформованого стану підсиленних фундаментів за допомогою пневмопробійників та проведено співставлення числового розрахунку з експериментальними даними.

Питання ущільнення та розущільнення ґрунтів під навантаженням – основна проблема, що виникає при прогнозуванні осідань споруди і допустимого навантаження на ґрунт.

Тому значна увага в роботі приділяється дилатансійній теорії та методам моделювання залишкових пластичних деформацій ґрунту з метою їх практичного застосування. Основною задачею є будівництво споруд з достатнім ступенем надійності.

Практично всі матеріали, в тому числі і ґрунт, руйнуються в результаті розвитку деформацій форми. Руйнування будь-якого твердого тіла – процес поступового розкриття спочатку найслабкіших місць, а потім все менш і менш небезпечних дефектів.

Фізична суть дилатансії ґрунтового середовища – руйнування ділянок зчеплення і повертання блоків, в результаті порушується структура, утворюються поверхні ковзання. Для врахування дилатансійних ефектів основи при навантаженні підсиленого фундаменту використано положення (Brebbia та ін., 1984; Бойко, 1985; Ніколаєвський, 1975).

Реальні задачі геомеханіки моделюються диференційними рівняннями в частинних похідних і зводяться до класу крайових задач. Розв’язок задач теорії пластичності пов’язаний з розв’язками системи нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що являє собою складну задачу. В аналітичному вигляді її можна розв’язати у виключних випадках.

Характерною і найбільш яскравою особливістю ґрунту є переважно пластичне його деформування практично з моменту завантаження. Розвиток пластичних (залишкових) деформацій, які складають

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j} + b_j &= 0 \\ \varepsilon_{ij} &= 0,5(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x), \quad (1)$$

де $\sigma_{ij,j} + b_j = 0$ – статичні рівняння рівноваги;

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ – геометричні рівняння;

$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ – фізичні рівняння середовища;

u, p – шукані вектори переміщень та напружень на границі фундаментної конструкції.

В роботі використано також метод пружних рішень О.А. Іллюшина.

При розгляді нелінійної задачі:

$$c_{ij} \cdot u_j + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{\sigma}^* \dot{\varepsilon}_{jk}^p d\Omega \quad (2)$$

де, u – заданий вектор переміщень на границі фундаментної конструкції;

p – шуканий вектор напруг на границі;

u^*, p^*, σ^* – ядра граничного рівняння (1) – рішення Р. Міндліна для переміщень, напружень та похідних від напружень, що відповідають одиничним збурюючим впливам ($P=1$) в півпросторі (Ніколаєвський, 1975).

більшу частину повних деформацій, обумовлює нелінійну залежність $\sigma - \varepsilon$, що потребує врахування в геомеханіці цієї обставини.

При обчисленні задачі про взаємодію підсиленого фундаменту з ґрунтом використано числовий метод граничних елементів (МГЕ) (Brebbia та ін., 1984; Моргун, 2013), який зводить крайову задачу визначення НДС будівельних конструкцій (систему із 15 диференційних рівнянь в частинних похідних) до інтегрального рівняння (1) а числове інтегрування, як відомо, є більш стійкий процес ніж числове диференціювання.

Основним розрахунковим рівнянням запроєктованої в роботі моделі роботи ґрунту,

і яке є аналогом системи 15 диференційних рівнянь (статичних рівнянь, геометричних, фізичних), є інтегральне рівняння, отримане К. Бреббія (1984):

Введення додаткових виразів ($\sigma_{jk}^*, \varepsilon_{jk}^*$) дозволили задовільнити умову обернення в нуль напружень на поверхні півпростору. При виведенні основного інтегрального співвідношення МГЕ (1, 2) використано теорему Бетті про взаємність робіт двох станів деформованого тіла:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \cdot \varepsilon^*_{jk} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma^*_{jk} \cdot \varepsilon_{jk} d\Omega \quad (3)$$

де C_{ij} – постійна, яка визначається із умов руху тіла як цілого, з’являється при переводі крайової задачі до інтегрального рівняння (1) для отримання єдиного рішення;

Γ, Ω - відповідно гранична поверхня фундаментної конструкції та границя трикутних осередків ґрунту.

При обчисленні задачі про взаємодію фундаменту з пружним середовищем в якості фундаментального рішення використано розв’язки Р. Міндліна, оскільки тиск від фундаменту в ґрунті

прикладається не до поверхні ґрунту, а на деякій глибині всередині масиву ґрунту.

Цьому положенню відповідає саме задача Р. Міндліна.

При розрахунку основ споруд практичний інтерес має розв'язок задачі про НДС при одночасовому існуванні в основі областей дограничної (пружної) та граничної рівноваги, яка отримала в механіці ґрунтів назву змішана задача теорії пружності та пластичності ґрунтів.

Рішення змішаної задачі має задовільнити в пружній і пластичній областях одним і тим же рівнянням рівноваги, геометричним рівнянням, але різним в цих областях фізичним рівнянням (умові текучості в пластичній області), та відповідним граничним умовам.

Для вирішення поставленої задачі при роботі ґрунту в пружній стадії використано фундаментальні положення механіки суцільних середовищ, в дограничній стадії прийнято модель лінійно-деформованого середовища, яка характеризувалась модулем загальної деформації E , коефіцієнтом Пуассона ν . При роботі ґрунту в пластичній стадії після порушення його загальної структури замість вимог ортогональності вектора приросту пластичних деформацій $d\varepsilon_{ij}^p$ до поверхні пластичності f в якості рівняння стану використано теорію пластичної течії, взято диференціальну залежність – неасоційований закон пластичної течії, який передбачає експериментальну побудову поверхні навантаження F :

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, F \neq f. \quad (4)$$

У відповідності до напрацьованої моделі загальні деформації визначались:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \sum \varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^p \delta_{ij}, \quad (5)$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^p(\text{шар}) + d\varepsilon_{ij}^p(\text{дев}). \quad (6)$$

Для визначення $d\varepsilon_{ij}^e$ використано співвідношення закону Гука. Для визначення $d\varepsilon_{ij}^p$ залучено неасоційований закон пластичної течії (4), та дилатансійну теорію ґрунтового середовища (Моргун, 2013; Ніколаєвський, 1975).

Для моделювання процесів ущільнення ґрунтів, стисливість яких в сотні раз перебільшує стискаємість будівельних матеріалів надземних споруд, використана система найсучасніших уявлень проф. В. Н. Ніколаєвського, проф. І. П. Бойка про дилатансійну теорію ґрунтового середовища (3, 4, 5):

$$d\varepsilon_{ij}^p(\text{шар}) = \Lambda(\chi) * d\gamma^p \quad (7)$$

де $d\varepsilon_{ij}^p(\text{шар})$, $d\gamma^p$ – скалярні еквіваленти приросту непружних об'ємних деформацій та приросту інтенсивності зсуву; $\Lambda(\chi)$ – швидкість дилатансії (додатковий параметр неасоційованого закону пластичної течії) (Моргун, 2013).

Приріст пластичних деформацій від девіатора напружень:

$$d\varepsilon_{\text{дев}}^p = D_{ij} d\lambda \quad (8)$$

де D_{ij} – девіатор напружень; $d\lambda$ – коефіцієнт пропорційності; $d\gamma^p$ – скалярний еквівалент приросту зсувної пластичної деформації на октаедричній площині; $d\varepsilon_{ij}^p$ – приріст непружних змін об'єму, що супутні зсуву; Λ – швидкість дилатансії:

$$\Lambda = dV/d\gamma. \quad (9)$$

Перехід в заграничний (пластичний) стан визначався у відповідності з умовою граничної рівноваги (текучості) Мізеса-Шлейхера-Боткіна, яка вказана на рисунку 1.

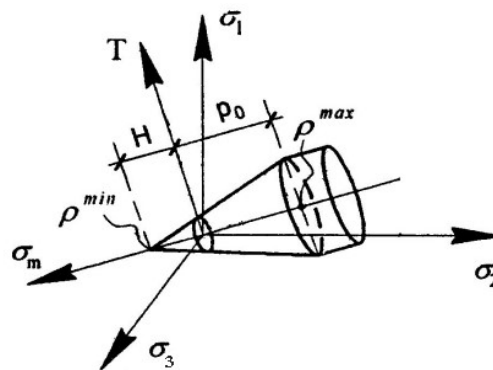


Рис.1. Модифікований критерій текучості Мізеса-Шлейхера-Боткіна.

Fig.1. Modified Mises-Schleicher-Botkin yield criterion

$$\begin{cases} f = T + \sigma_{\text{окт}} \cdot \text{tg} \psi - \tau_s = 0 & \text{при } \sigma_{\text{окт}} \leq \rho_0 \\ f = T + \rho_0 \cdot \text{tg} \psi - \tau_s = 0 & \text{при } \sigma_{\text{окт}} > \rho_0 \end{cases}, \quad (10)$$

Графік експериментальних досліджень згідно (Козаков та ін., 1990). вказано на рисунку 2.

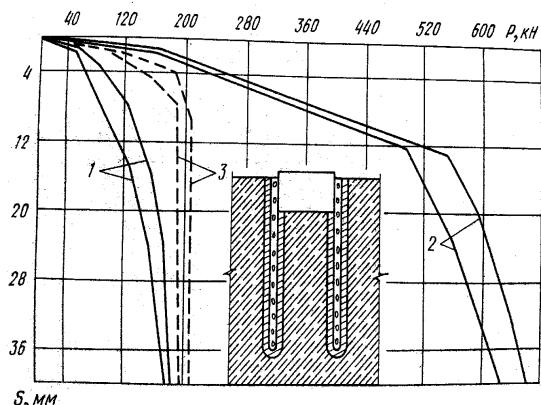


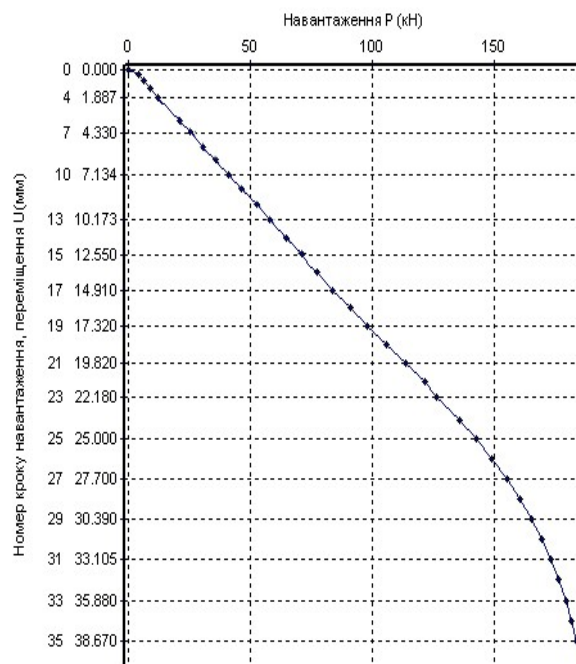
Рис. 2. Графік експериментальних досліджень фундаменту. 1 – на натуральній основі; 2 – після підсилення набивними палями, 3 – поведінка одиночної набивної палі.

Fig. 2. Graph of experimental studies of the foundation. 1 – on a natural base; 2 – after reinforcement with driven piles, 3 – behavior of a single driven pile.

При проведенні розрахунку гранична поверхня фундаменту дискредитувалась граничними елементами, активна зона навколо фундаментного ґрунту дискредитувалась трикутними осередками.

Фізико-механічні характеристики ґрунту: $\rho = 1,7 \text{ г/см}^3$; $\rho_{\min} = 1,6 \text{ г/см}^3$; $\rho_{\max} = 2,2 \text{ г/см}^3$ $e = 0,7$; $E = 10,54 \text{ МПа}$; $\nu = 0,33$; $C = 14 \text{ кПа}$; $\varphi = 24^\circ$.

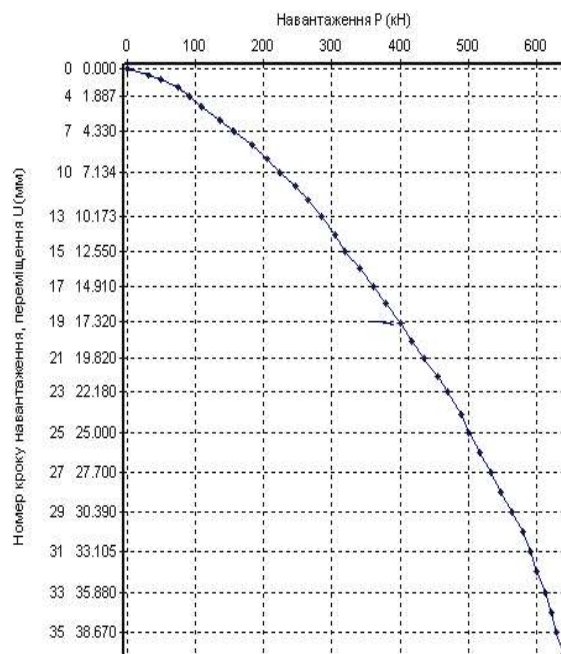
Результати числового прогнозу напружено-деформований стану за МГЕ роботи не підсиленого фундаменту вказано на рис. 3.; підсиленого фундаменту – вказано на рис. 4.



→ Графік залежності навантаження - осідання.

Рис. 3. Графік «навантаження–осідання» результатів числових дослідження за МГЕ фундаменту без підсилення.

Fig. 3. Load-settlement graph of the results of numerical studies using BEM of a foundation without reinforcement.



→ Графік залежності навантаження - осідання.

Рис. 4. Графік «навантаження–осідання» результатів числових дослідження за МГЕ підсиленого фундаменту.

Fig. 4. Load-settlement graph of the results of numerical studies using BEM of a reinforced foundation.

ВИСНОВКИ

Дані співставлень є задовільними, значення несучої спроможності як підсиленого, так і не підсиленого фундаментів згідно рис. 2 та рис. 3, 4 практично співпадають.

Згідно даних експериментальних досліджень (Козаков та ін., 1990) при $U=40$ мм несуча спроможність не підсиленого фундаменту склала $P=180$ кН, підсиленого – $P=680$ кН.

За числовими дослідженнями (МГЕ): при $U=40$ мм несуча спроможність не підсиленого фундаменту склала $P=174$ кН, підсиленого – $P=659$ кН.

Напрацьована за числовим МГЕ нелінійна модель для визначення несучої спроможності підсиленого набивними палями фундаменту фіксує збільшення несучої спроможності більше ніж в три рази (в 3,78 рази). Згідно експериментальних даних збільшення несучої спроможності склало 3.8 рази.

Достовірність моделі підтверджено проведеним аналізом результатів числових досліджень за МГЕ, та виконаним співвідношенням з експериментальними даними, які отримані безпосередньо заміром тиску в ґрунтовій основі (Козаков та ін., 1990), та дають хорошу відповідність.

Дане конструктивне рішення є ефективним проектним рішенням для підсилення фундаменту мілкого закладання, і гарантує надійність експлуатації споруди.

ЛІТЕРАТУРА

1. Brebbia C. A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. (1984). *Boundary element techniques. Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. New York.
2. Бойко І. П. (1985). Теоретичні основи проектування пальових фундаментів на пружно-пластичній основі. *Основи і фундаменти: Науково-технічний збірник*, 18, 11-18.
3. Козаков Ю. Н., Буланкін Н. Ф., Стоян Ю.Ф. (1990). Підсилення фундаментів палями, влаштованими за допомогою

пневмопробійників. *Основи, фундаменти і механіка ґрунтів: Збірник*, 4, 26-29.

4. Моргун А. С. (2013). Теорія пластичної течії в механіці ґрунтів: *Монографія*. Вінниця: ВНТУ.
5. Ніколаєвський В. Н. (1975). *Сучасні проблеми механіки ґрунтів. Визначальні закони механіки ґрунтів*. Мир., 210-227

REFERENCES

1. Brebbia C. A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. (1984). *Boundary element techniques. Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. New York.
2. Boiko I. P. (1985). Teoretychni osnovy proektuvannya palyevykh fundamentiv na pruzhno-plastychnij osnovi [Theoretical bases of design of pile foundations on the elastic-plastic basis]. *Osnovy i fundamenty: Naukovo-tekhnichniy zbirnyk*, 18, 11-18. (In Ukrainian).
3. Kozakov Y. N., Bulankin N. F., Stoyan Y. F. (1990). Pidsylennya fundamentiv palyamy, vlashtovanymy za dopomogou pnevmoprobijnykiv [Strengthening of the bases by the piles arranged by means of pneumatic punches]. *Osnovy, fundamenty i mekhanika gruntiv: Zbirnyk*, 4, 26-29. (In Ukrainian).
4. Morgun A. S. (2013). Teoriya plastychnoi techij v mekhanitsi gruntiv: Monohrafiya [The theory of plastic flow in soil mechanics: Monograph]. Vinnytsia: VNTU. (In Ukrainian).
5. Nikolaevsky V. N. (1975). Suchasni problemy mekhaniky gruntiv. Vyznachalni zakony mekhaniky gruntiv. [Modern problems of soil mechanics. Determining soil mechanics]. Myr., 210-227.

Deformation Mechanics of Reinforced Foundations Using the Boundary Element Method

Alla MORGUN

Ivan MET

Dmytro ZAPYSOV

Andriy KOLESNYK

Summary. Deformation of soils under load is a complex process. This is due to the heterogeneity of the soil mass environment, complex geometric shapes of foundations, uneven loading on soils. Nonlinearity implies that the ratio between the components of the stress-strain state changes in the process of its change. It is very difficult to find

accurate analytical solutions for predicting the stress-strain state of the soil. Problems of nonlinear soil deformation can be solved by numerical methods that allow avoiding the use of simplified assumptions that are accepted in analytical methods.

The work is devoted to improving the methodology for calculating the stress-strain state of reinforced foundations using the modern numerical method of boundary elements (BEM) for the purpose of practical application, making decisions about their bearing capacity. Strengthening foundations is aimed at adapting them to trouble-free operation in variable operating conditions.

When calculating the problem of the interaction of the foundation with the elastic medium, the solutions of R. Mindlin were used as the fundamental solution, since the pressure from the foundation in the soil is applied not to the soil surface, but at a certain depth inside the soil mass.

When calculating, the boundary surface of the foundation was discretized by boundary elements, the active zone of the soil around the foundation was discretized by triangular cells.

The calculation was carried out taking into account the dilatancy properties of the soil of the construction site and using the elastic-plastic model of the soil base. The topic of the work, which is devoted to the improvement of the computational and theoretical apparatus for designing reinforced foundations of structures, is relevant today.

The application of BEM to the solution of a practical problem of geomechanics, the process of foundation settlement, and permissible loads on them is supported and illustrated by the data of the numerical calculation of reinforced columnar foundations of shallow foundation.

As a result of the study, comparing the data of the numerical calculation and the full-scale experiment, the values of the bearing capacity of both reinforced and unreinforced foundations practically coincide.

Key words: Bearing capacity, foundation strengthening, boundary element method, stress-strain state.

Стаття надійшла до видання:

21.04.2026.

Стаття прийнята до друку після рецензування:

08.05.2026.

Стаття опублікована:

30.05.2026